

# Численные методы решения задач с решениями типа «бегущей волны»

Васильев В.И.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск  
(Работа выполнена при поддержке гранта РНФ №23-71-30013)

10 апреля 2025

*Научный семинар  
Томский государственный университет  
г. Томск - 2025*

# Введение

Математическое моделирование актуальных прикладных проблем науки и техники во многих интересных приложениях приводит к задачам, имеющим решения типа бегущей волны. Примерами подобных задач являются, например, начально-краевые задачи для уравнений: Баклея-Левверетта, Колмогорова-Петровского-Пискунова-Фишера, квазилинейного параболического уравнения и др.

Бегущие волны являются фундаментальными решениями различных типов уравнений в частных производных, в том числе тех, которые управляют теплопроводностью. В своей работе Самарский А. А. и Соболев И. М.<sup>1</sup> представляли комплексное исследование численных решений квазилинейного уравнения теплопроводности, в том числе, и внимание решениям типа "бегущей волны".

---

<sup>1</sup>Самарский А. А., Соболев И. М. Примеры численного расчета температурных волн //Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1963. – Т. 3. – №. 4. – С. 702-719.

В работе Четверушкина Б.Н., Ольховской О.Г. и Цыгвинцева И.П.<sup>2</sup> рассматривают новый подход в численном решении задач высокотемпературной газовой динамики в высокопроизводительных вычислительных системах. Одной из важных областей использования описанного подхода является высокотемпературная газовая динамика с лучистой теплопроводностью.

В докладе представлены результаты численной реализации дискретных аналогов задач с решениями типа "бегущих волн". Приведенные численные результаты показали достаточно высокую вычислительную эффективность построенных вычислительных алгоритмов.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФ 23-71-30013 и 23-71-30037.

---

<sup>2</sup>Chetverushkin B. N., Olkhovskaya O. G., Il'ya P. T. Numerical solution of high-temperature gas dynamics problems on high-performance computing systems // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2021. – Т. 390. – С. 113374.

# Уравнение Баклея-Лeverетта

Уравнение Баклея-Лeverетта используется для описания вытеснения водой нефти:

$$m \frac{\partial s}{\partial t} + Q \frac{\partial \varphi(s)}{\partial x} = 0, \quad x \in (0, l], \quad t \in (0, \bar{t}], \quad (1)$$

где  $m$  – пористость среды, коэффициент  $Q$  – суммарная скорость потока воды и нефти,  $\varphi(s)$  – функция Баклея-Лeverетта, которая определяется по следующей формуле:

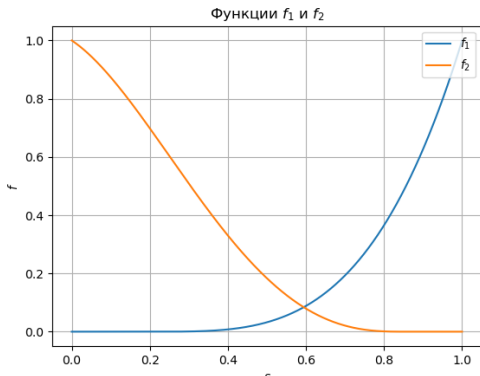
$$\varphi(s) = \frac{f_1(s)}{f_1(s) + \mu_0 f_2(s)} \quad \mu_0 = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (2)$$

Здесь  $f_1(s)$  и  $\mu_2$  – относительные фазовые проницаемости нефти и воды.

Для вычисления относительных фазовых проницаемостей используем эмпирические формулы академика Л.С.Лейбензона:

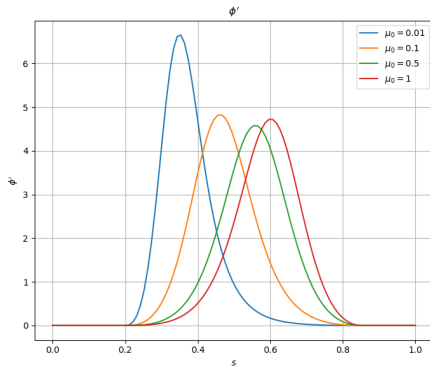
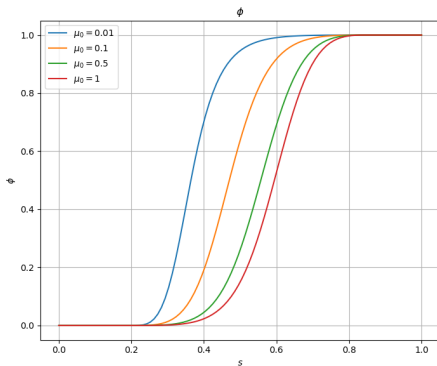
$$f_1(s) = \begin{cases} 0, & 0 \leq s \leq 0.2, \\ \left(\frac{s-0.2}{0.8}\right)^{3.5}, & 0.2 < s \leq 1. \end{cases} \quad (3)$$

$$f_2(s) = \begin{cases} (1 + 2.4s) \left(\frac{0.85-s}{0.85}\right)^{2.8}, & 0 \leq s < s = 0.85, \\ 0, & 0.85 \leq s \leq 1. \end{cases} \quad (4)$$



На рисунке слева представлены графики функции Баклея-Левретта  $\varphi(s)$  для различных значений  $\mu_0 = \mu_2/\mu_1 = 0.01, 0.1, 0.5, 1$ .

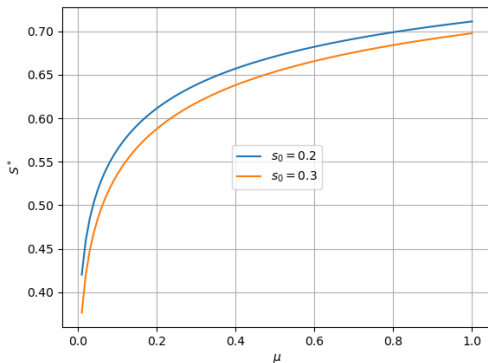
А справа представлены графики производной функции Баклея-Левретта по водонасыщенности  $\varphi'(s)$ .



Величину водонасыщенности  $s^*$  на фронте ударной волны следует определить из условия Ренкина-Гюгоньо:

$$\varphi'(s^*) = \frac{\varphi(s^*) - \varphi(s_0)}{s^* - s_0}$$

На рисунке представлены графики фронтальной от насыщенности  $s^*$  параметра  $\mu_0$  при различных значениях величины начальной водонасыщенности  $s_0 = 0.2, 0.3$ .



## Приведем численные примеры на модельной задаче:

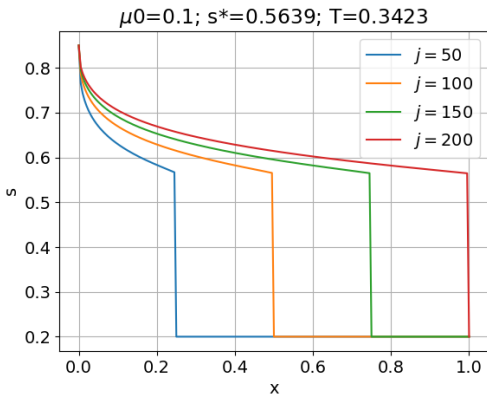
**Пример 1.** Рассмотрим численную реализацию с помощью "явный уголок". Поставленную задачу аппроксимируем с помощью явной схемы уголок, при этом выбираем величину временного шага вычисляем по формуле

$$\tau = \frac{mh * l}{Q\varphi'(s^*)} :$$
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{s_i^{k+1} - s_i^k}{\tau} + \frac{\varphi_i^k - \varphi_{i-1}^k}{h} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ k = 0, 1, \dots, K - 1, \\ s_0^{k+1} = 0.85, \quad k = 0, 1, \dots, K - 1, \\ s_i^0 = s_0, \quad i = 0, 1, \dots, n. \end{array} \right. \quad (5)$$



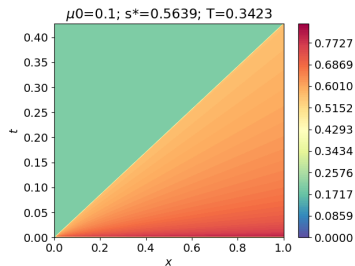
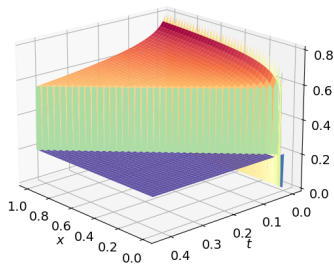
Численная реализация при следующих данных:

$$l = 1, n = 200, J = 200, s_0^{k+1} = 0.85$$



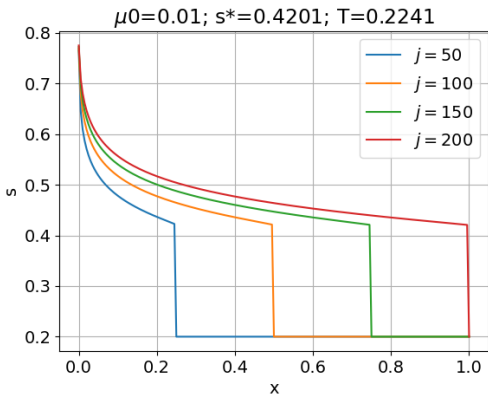
Численная реализация при следующих данных:

$$l = 1, n = 200, J = 200, s_0^{k+1} = 0.85$$



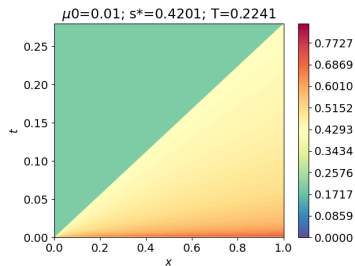
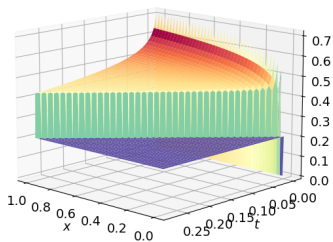
Численная реализация при следующих данных:

$$l = 1, n = 200, J = 200, s_0^{k+1} = 0.85$$



Численная реализация при следующих данных:

$$l = 1, n = 200, J = 200, s_0^{k+1} = 0.85$$



## Дивергентная разностная схема

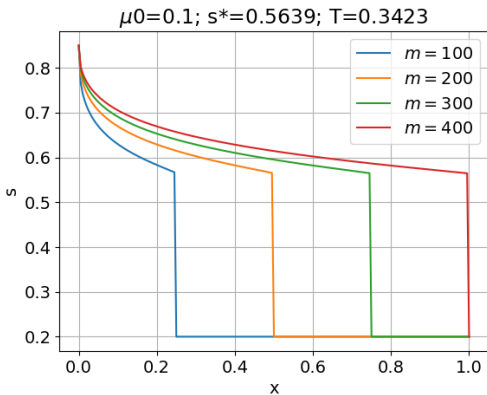
**Пример 2.** В данной задаче будем рассматривать аппроксимацию с помощью дивергентной разностной схемы. Граничное условия берем из сеточного закона объема закачанной в коллектор воды за временной промежуток  $\tau$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{s_i^{k+1} - s_i^k}{\tau} + \frac{\varphi_i^k - \varphi_{i-1}^k}{h} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ \\ k = 0, 1, \dots, K - 1, \\ \\ s_0^{k+1} = \bar{s}, \quad k = 0, 1, \dots, K - 1, \\ \\ s_i^0 = s_0, \quad , s_0^0 = 0.2, \quad i = 0, 1, \dots, n. \end{array} \right. \quad (6)$$

$$\bar{s} = \begin{cases} s_0 + \frac{2\tau}{h}(1 - \varphi_0), & \text{если } s_0 + \frac{2\tau}{h}(1 - \varphi_0) < 0.85, \\ 0.85, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

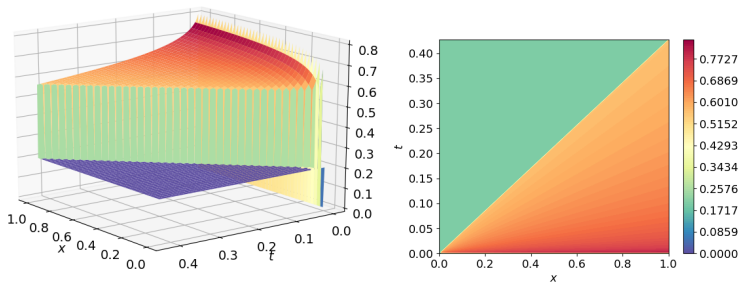
Численная реализация при следующих данных при водонасыщенности  $s_0 = 0.2$ :

$$l = 1, n = 200, J = 200, s_0^{k+1} = \bar{s}$$



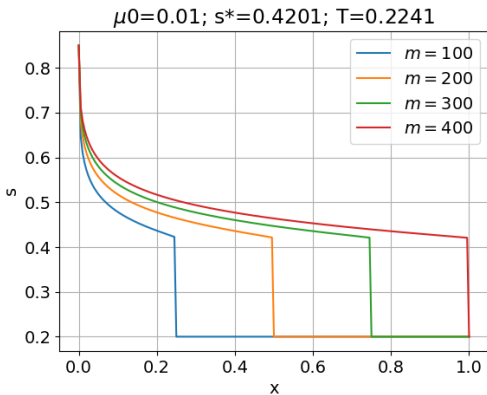
Численная реализация при следующих данных:

$$l = 1, n = 200, J = 200$$



Численная реализация при следующих данных при водонасыщенности  $s_0 = 0.2$ :

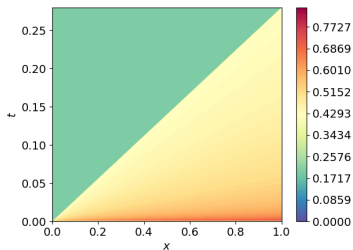
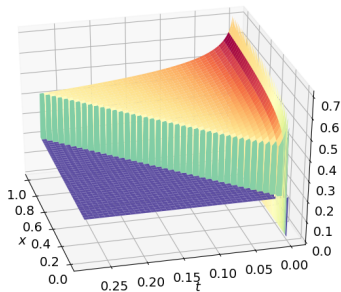
$$l = 1, n = 200, J = 200, s_0^{k+1} = \bar{s}$$





Численная реализация при следующих данных:

$$l = 1, n = 200, J = 200$$



## Численное решение задачи

### Колмогорова-Петровского-Пискунова (Фишера)

Пусть в области  $\Omega_T = [-l, l] \times [0, T]$  требуется определить функцию  $u(x, t)$ .

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au - bu^2, \quad x \in (-l, l), \quad t \in (0, T], \quad (7)$$

где  $t$  – время,  $x$  – пространственная переменная,  $D$  – коэффициент диффузии,  $a = a(x, t)$  – коэффициент прироста бактерий,  $b(x, t)$  – коэффициент конкурентных потерь, называемый функцией влияния,  $u(x, t)$  – искомая кинетическая переменная.

Задаем однородные граничные условия Дирихле:

$$u(-l, t) = u(l, t) = 0, \quad t \in (0, T], \quad (8)$$

Начальное условие:

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad x \in \Omega. \quad (9)$$

## Разностная схема

В начально-краевой задаче (7) – (9) поставим в соответствие неявную разностную схему:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{\tau} = D \left( \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{h^2} \right) + au_i^j - b(u_i^j)^2, \\ i = 1, 2, \dots, N-1, \quad j = 1, 2, \dots, M, \\ u_0^j = u_N^j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, M, \\ u_i^0 = u_0(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, N. \end{array} \right. \quad (10)$$

Приведем примеры численной реализации неявной разностной схемы:

**Пример 1.** Зададим начальное условие:

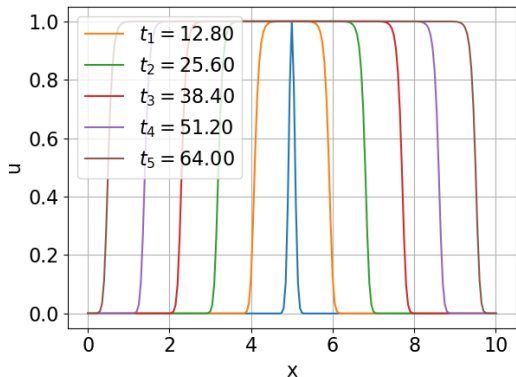
$$u(x, 0) = u_0(x) = \exp(-100(x - 0.5l)^2), \quad x \in [-l, l], \quad (11)$$

Задаем граничные условия Дирихле:

$$u(-l, t) = u(l, t) = 0, \quad t \in (0, T], \quad (12)$$

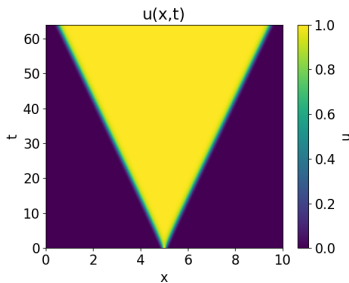
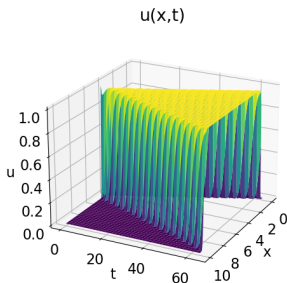
Приведем численные результаты в разные моменты времени при значениях:

$$n = 200, m = 160, D = 0.001, a = 1, b = 1, L = 10$$



Численный результат  $u(x, t)$  в виде трехмерного графика(слева) и и профиль численного решения (справа) при:

$$n = 200, m = 160, D = 0.001, a = 1, b = 1, L = 10$$



## Пример 2:

Зададим следующее начальное условие:

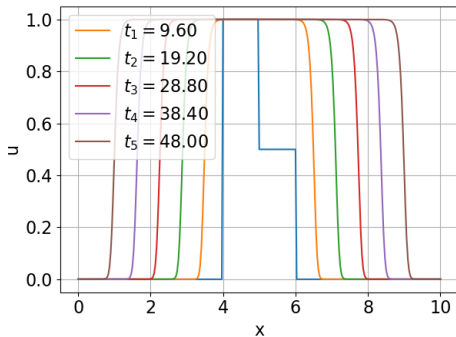
$$u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0.4l \text{ или } x > 0.6l, \\ 1, & \text{если } 0.4l \leq x < 0.5l, \\ 0.5, & \text{если } 0.5l \leq x \leq 0.6l. \end{cases} \quad (13)$$

Задаем граничные условия Дирихле:

$$u(-l, t) = u(l, t) = 0, \quad t \in (0, T], \quad (14)$$

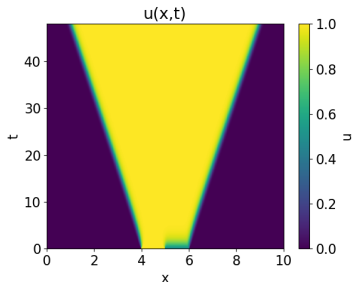
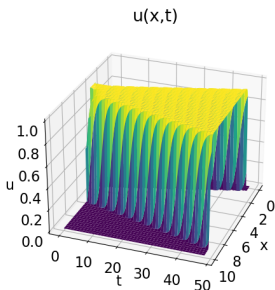
# Результаты численной реализации схемы в разные моменты времени при значениях:

$$n = 300, m = 180, D = 0.001, a = 1, b = 1, L = 10$$





Численный пример - численное решение  $u_i^j$  в виде трехмерного графика(слева) и профиль решения (справа) при:  
 $n = 300, m = 180, D = 0.001, a = 1, b = 1, L = 10$



# Нелокальная задача КПП

Пусть в области  $\Omega_T = [-l, l] \times [0, T]$  требуется определить функцию  $u(x, t)$  – решение модельной нелокальной одномерного задачи Колмогорова - Петровского - Пискунова (Фишера)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial u}{\partial x} \right) + au - ku \int_{-l}^l b(x, y) u(y, t) dy, \quad x \in (-l, l), \quad 0 < t \leq T,$$

Задаются однородные граничные условия Дирихле и начальное условие

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad 0 < t \leq T,$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega.$$

Построим неявную разностную схему для данной нелокальной задачи, в ней интегральную часть аппроксимируем явно:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{\tau} = D \left( \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{h^2} \right) + \\ \quad + au_i^j - cu_i^j \sum_{m=0}^n b_{im} u_m^{j-1} h, \\ i = 1, 2, \dots, n-1, \quad j = 1, 2, \dots, K, \\ u_0^j = u_n^j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, K, \\ u_i^0 = u_0(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n. \end{array} \right.$$

## Пример 3.

Рассмотрим следующее начальное условие:

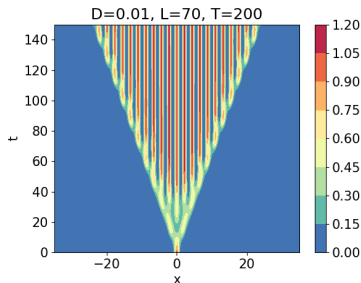
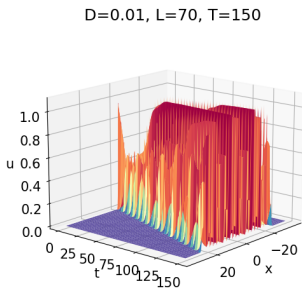
$$u_0(x) = e^{-\pi x^2}, \quad x \in [-l, l],$$

$$b(x, y) = \begin{cases} c & \text{для } |x - y| \leq z, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

Задаем однородные граничные условия Дирихле:

$$u(-l, t) = u(l, t) = 0, \quad t \in (0, T].$$

При численной реализации будем считать, что параметры  $a, c=1$ . Численные результаты при значениях:  
 $n = 300, m = 300, L = 70, z = 1.5$



## Пример 4.

Рассмотрим следующее начальное условие с тремя источниками:

$$u_0(x) = 0.5e^{-\pi(x-y)^2} + e^{-\pi x^2} + 0.1e^{-\pi(x+y)^2}, \quad x \in [-l, l],$$

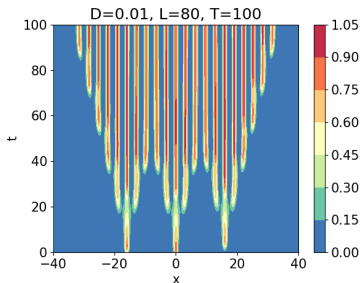
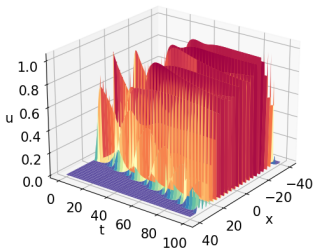
$$b(x, y) = \begin{cases} c & \text{для } |x - y| \leq z, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

Задаем однородные граничные условия Дирихле:

$$u(-l, t) = u(l, t) = 0, \quad t \in (0, T].$$

При численной реализации будем считать, что параметры  $a, c=1$ . Приведем результаты численного решения при:  
 $n = 200, m = 200, z = 2.3$

$D=0.01, L=80, T=100$



# Квазилинейное параболическое уравнение

Рассмотрим уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial}{\partial x} \left( u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (15)$$

Уравнение (15) имеет точное решение:

$$u(x, t) = \begin{cases} \sigma^{\sigma-1} (t-x)^{\frac{1}{\sigma}}, & x \leq t, \\ 0, & x > t. \end{cases} \quad (16)$$

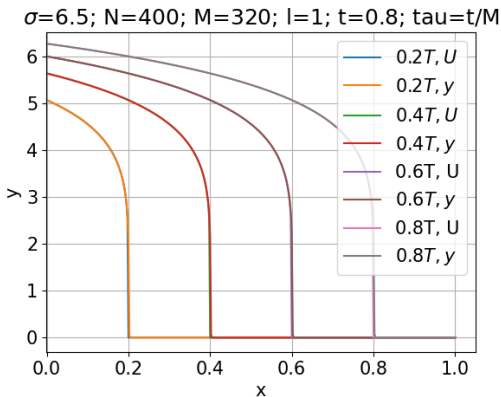


## Разностная схема

Поставим в соответствие неявную разностную схему уравнению (15) с соответствующими точному решению (16) граничными и начальному и граничным условиям:

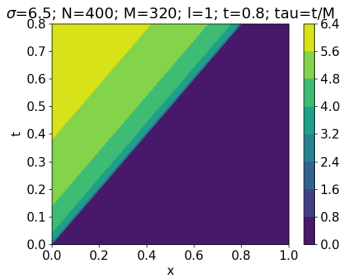
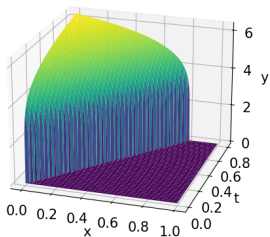
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{y_i^{s+1} - y_i^s}{\tau} = \frac{K}{h^2} \left( \left( \frac{y_{i+1}^s + y_i^s}{2} \right)^\sigma (y_{i+1}^{s+1} - y_i^{s+1}) - \left( \frac{y_i^s + y_{i-1}^s}{2} \right)^\sigma (y_i^{s+1} - y_{i-1}^{s+1}) \right), \quad i = 1, 2, \dots, n-1; \quad s = 1, 2, \dots, K; \\ y_n = 0, \\ y_i^0 = u(0, t), \quad t \in \omega_\tau. \end{array} \right. \quad (17)$$

При численной реализации будем считать, что параметр  $K=1$ . На рисунке представлены графики численных результатов  $x$  и точных решений  $T$  в разные моменты времени при  $\sigma = 6.5$ . На каждом временном слое требуется примерно в среднем по 3 итерации.

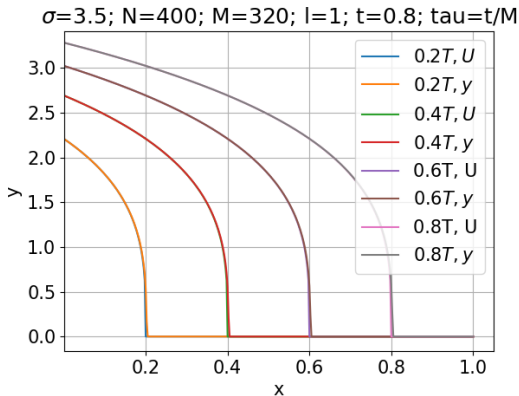


При численной реализации будем считать, что параметр  $K=1$ .  
Численный пример - численное решение  $y$  в виде трехмерного графика (слева) и профиль решения (справа) при  $\sigma = 6.5$ .

$\sigma=6.5$ ;  $N=400$ ;  $M=320$ ;  $l=1$ ;  $t=0.8$ ;  $\tau=t/M$

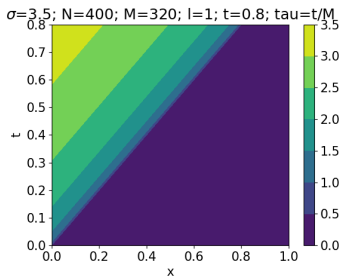
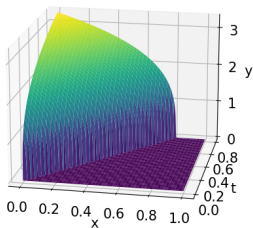


На рисунке представлены графики численных результатов  $x$  и точного решения  $T$  в разные моменты времени при  $\sigma = 3.5$ .

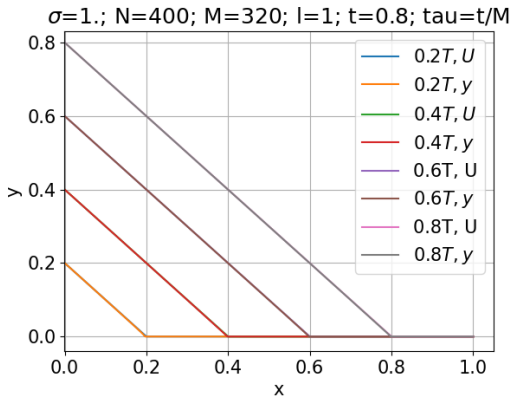


При численной реализации будем считать, что параметр  $K=1$ .  
Численный пример - численное решение  $y$  в виде трехмерного графика (слева) и профиль решения (справа) при  $\sigma = 3.5$ .

$\sigma=3.5$ ;  $N=400$ ;  $M=320$ ;  $l=1$ ;  $t=0.8$ ;  $\tau=t/M$

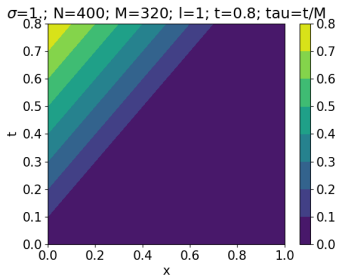
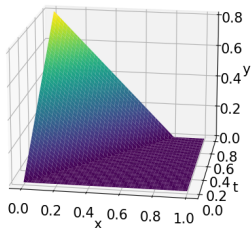


На рисунке представлены графики численных результатов  $Y$  и точных решений  $U$  в разные моменты времени при  $\sigma = 1$ .

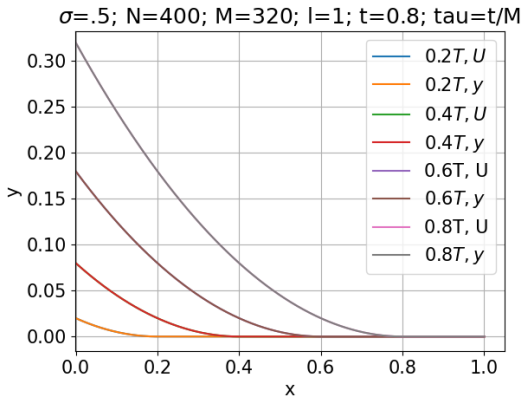


При численной реализации будем считать, что параметр  $K=1$ .  
Численный пример - численное решение  $u$  в виде трехмерного графика (слева) и профиль решения (справа) при  $\sigma = 1$ .

$\sigma=1.$ ;  $N=400$ ;  $M=320$ ;  $l=1$ ;  $t=0.8$ ;  $\tau=t/M$



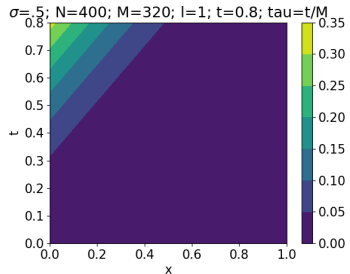
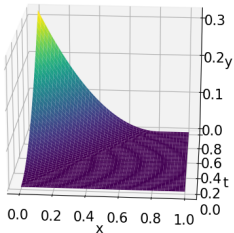
На рисунке представлены графики численных результатов  $Y$  и точных решений  $U$  в разные моменты времени при  $\sigma = 0.5$ .





При численной реализации будем считать, что параметр  $K=1$ .  
Численный пример - численное решение  $u$  в виде трехмерного графика (слева) и профиль решения (справа) при  $\sigma = 0.5$ .

$\sigma=0.5$ ;  $N=400$ ;  $M=320$ ;  $l=1$ ;  $t=0.8$ ;  $\tau=t/M$



## 7. Заключение

В докладе представлены результаты численного моделирования трех процессов, имеющих решения типа "бегущих волн".

Проведенные вычислительные эксперименты на модельных задачах показали эффективность представленного подхода:

1. Численное решение задачи Баклея – Леверетта с помощью схемы "явный уголок" с определением величин  $s^*$  и  $\tau$  продемонстрировало отличные результаты.
2. Численное решение задачи Колмогорова-Петровского-Пискунова-Фишера с помощью неявной разностной схемы в сочетании с итерационным методом Ньютона также дает очень хорошие результаты.
3. Численная реализация методом простых итераций неявной разностной схемы для квазилинейного параболического уравнения с решением типа бегущей волны при подходящем выборе временного шага показывает высокую точность.

# Благодарю за внимание!

vasvasil@mail.ru