

# ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

Васильев В.И.

Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова

(Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №23-71-30013)

Научный семинар ИПМ РАН

8 апреля 2025

г. Москва

# План презентации

- ① Введение
- ② Постановка прямой задачи для уравнения субдиффузии
- ③ Численное восстановление пространственного множителя правой части уравнения субдиффузии
  - ① Постановка обратной задачи, дискретный аналог
  - ② Результаты вычислительного эксперимента
- ④ Численное восстановление зависящего от времени множителя правой части уравнения субдиффузии
  - ① Постановка обратной задачи, дискретный аналог
  - ② Результаты вычислительного эксперимента
- ⑤ Заключение

# 1. Введение

Теоретическое исследование условной корректности и разработка эффективных численных методов решения обратных задач являются весьма актуальными в связи с широким использованием их в качестве математических моделей различных природных явлений и технологических процессов.

В настоящее время в нашей стране школами А.Н. Тихонова, М.М. Лаврентьева, В.Г. Романова, В.К. Иванова и их учениками велась и ведется большая работа по теоретическому исследованию и разработке эффективных численных методов решения обратных задач. Их ученики теперь работают во многих ведущих математических центрах мира и радуют нас своими первоклассными результатами мирового уровня.

Исследование обратных задач для дифференциальных уравнений с дробными производными находится в процессе бурного развития, как в теоретическом плане, так и в их приложениях и превратился в инструмент математического моделирования сложнейших динамических процессов. Прикладное значение в этом процессе коэффициентных обратных задач весьма значительно, и по сути они представляют собой обширный класс обратных задач.

В докладе представлены численные методы решения обратной задачи идентификации правой части линейного нелокального уравнения субдиффузии. Для восстановления стационарного множителя правой части предложена неявная разностная схема, в качестве условия переопределения использовано значения решения в финальный момент времени. Также представлена неявная разностная схема решения обратной задачи идентификации неизвестного нестационарного множителя правой части линейного нелокального уравнения субдиффузии. В качестве условия переопределения рассмотрены случаи: задания значения решения в заданной точке  $\bar{x} \in (0, l)$ ,  $t \in [0, T]$ , задания значения взвешенного интеграла по области определения пространственной области.

Эффективным подходом решения обратных задач являются итерационные методы академика А.А.Самарского и его учеников<sup>1</sup>, предложено для численной реализации дискретного аналога ретроспективной обратной задачи теплопроводности. Ими и их учениками выполнены ряд работ, в которых в первую очередь, строится конечно-разностный аналог задачи, а потом для численной реализации полученной системы линейных алгебраических уравнений применяется итерационные методы вариационного типа. На каждой итерации решается прямая задача теплопроводности с последующим уточнением начального условия. Метод хорошо работает и при идентификации начального условия для уравнения субдиффузии. Он хорошо работает и для определения плотности стационарного источника в уравнении теплопроводности. В этих задачах также сначала строится дискретный аналог рассматриваемой обратной задачи, затем численная реализация полученной системы линейных алгебраических уравнений осуществляется итерационным методом сопряженных градиентов.

---

<sup>1</sup>А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич, В.И. Васильев. Итерационное решение ретроспективной обратной задачи теплопроводности // Матем. моделирование, 9:5, 1997, 119–127.

С профессором П.Н. Вабищевичем в работе <sup>2</sup> для численного решения обратной задачи с неизвестными коэффициентом, зависящим от времени, предложена специальная декомпозиция решения, при которой переход на новый временной слой осуществляется путем решения двух стандартных сеточных эллиптических задач. Этот же подход решения находит успешное применение для других коэффициентов обратных задач и для граничной обратной задачи.

---

<sup>2</sup>П.Н. Вабищевич, В.И. Васильев. Вычислительная идентификация младшего коэффициента параболического уравнения // Доклады академии наук. – 2014. – Т. 455, № 3. – С. 258-260.

Для численного восстановления стационарной правой части уравнения субдиффузии сначала строится дискретный аналог поставленной обратной начально-краевой задачи с неоднородными граничными условиями Дирихле. Полученная система алгебраических уравнений численно реализуется методом сопряженных градиентов. Приведены примеры восстановления стационарной правой части для модельных задач. Проведенные численные эксперименты показали высокую точность.

Для численного восстановления множителя, зависящей от времени, в правой части уравнения субдиффузии на каждой временном слое решаются две вспомогательные сеточные эллиптические задачи, а значение множителя определяется из декомпозиции решения вспомогательными функциями и заданного условия переопределения. Приведены примеры восстановления временного множителя модельных задач с точными решениями. Проведенные численные эксперименты показали высокую точность восстановления неизвестных величин.

## 2. Постановка прямой задачи

Пусть в области  $\Omega = \prod_{i=1}^d [0, l_i]$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ , требуется определить функцию  $u(\mathbf{x}, t)$  из условий

$${}_0^C D_t^\alpha u = \sum_{m=1}^d \frac{\partial}{\partial x_m} \left( k_m(\mathbf{x}, t) \frac{\partial u}{\partial x_m} \right) + p(t)f(\mathbf{x}), \quad m \in \Omega, \quad 0 \leq t < T,$$

решение уравнения удовлетворяет начальному условию

$$u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega},$$

неоднородному граничному условию Дирихле на границах области

$$u(\mathbf{x}, t) = \mu(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad 0 \leq t < T$$

Следует отметить, что для корректности постановки прямой начально-краевой задачи необходимо выполнение условия согласования начального и граничного условий.



Введем в области  $\Omega_T = \Omega \times [0, T]$  прямоугольную равномерную пространственно-временную сетку

$$\omega = \omega_h \times \omega_\tau,$$

где

$$\bar{\omega}_h = \prod_{m=1}^d \{ \mathbf{x}_m \mid x_{mi} = ih_m, i = 0, 1, \dots, M_m; h_m = l_m/M_m \},$$

$$\bar{\omega}_\tau = \{ t_j \mid t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, N; \tau = T/M \}.$$

$\partial\omega_h$  — множество граничных узлов

Для аппроксимации дробной производной Капуто используем дискретизацию, предложенную в работе<sup>3</sup>, имеющую порядок аппроксимации  $O(\tau^{2-\alpha})$

$$\begin{aligned} {}^C_0D_{t_j}^\alpha u(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{t_j} \frac{\partial u(\mathbf{x}, s)}{\partial s} (t_j - s)^{-\alpha} ds \approx \\ &\approx \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{k=1}^j \frac{u(\mathbf{x}, t_k) - u(\mathbf{x}, t_{k-1})}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{ds}{(t_j - s)^\alpha} + O(\tau^{2-\alpha}) = \\ &= \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=1}^j v_k \left( u(\mathbf{x}, t_{j-k+1}) - u(\mathbf{x}, t_{j-k}) \right) + O(\tau^{2-\alpha}) \end{aligned}$$

где

$$v_1 = 1, \quad v_k = k^{1-\alpha} - (k-1)^{1-\alpha}, \quad k = 2, 3, \dots, N.$$

---

<sup>3</sup>P. Zhuang and F. Liu, Implicit Difference Approximation for the Time Fractional Diffusion Equation J. Appl. Math. Computing. Vol. 22, N. 3, (2006) pages 87–99

Введем гильбертово пространство сеточных функций  $y, v \in H = L_2(\omega)$ , в котором скалярное произведение и норма определены следующим образом:

$$(y, w) = \sum_{\mathbf{x} \in \omega} y(\mathbf{x})v(\mathbf{x})h, \quad \|y\| \equiv \sqrt{(y, y)}.$$

В предположении достаточной гладкости коэффициента  $k_m(\mathbf{x}, t)$  в области  $\omega$  сеточный аналог эллиптического оператора  $L$  записывается в виде:

$$A(t)y(t) = - \sum_{m=1}^d (k(x, t)y_{\bar{x}_m})_{x_m}$$

$$(k(x, t)y_{\bar{x}_m})_{x_m} = \frac{1}{h_m} (k_{m,i+1}y_{x_{m,i+1}}) - k_{m,i}y_{x_{m,i}} \quad i = 1, 2, \dots, M_k - 1.$$

$$k_{m,i}(x, t) = k(\dots, x_{m,i} + 0.5h, \dots, t)$$

В пространстве сеточных функций  $H$  оператор  $A$  является самосопряженным и положительно определенным  $A = A^* > 0$ .

Следует отметить, что при аппроксимации дробной производной Капуто по времени используются значения решения в точке  $x \in \omega$  во всех предыдущих временных слоях.

Для численного решения рассматриваемой начальной краевой задачи для нелокального уравнения субдиффузии используем неявную разностную схему

$$y^j + r_\alpha A^j y^j = \sum_{k=0}^{j-1} c_{j-k} y^k + r_\alpha p^j f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \omega, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

$$y^j(\mathbf{x} = \mu(\mathbf{x}, t^j)), \quad \mathbf{x} \in \partial\omega_h, \quad j = 0, 1, \dots, N,$$

$$y^0(\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \omega.$$

Здесь использованы обозначения

$$r_\alpha = \Gamma(2 - \alpha) \tau^\alpha, \quad c_k = v_{k-1} - v_k, \quad k = 1, 2, \dots, j-1, \quad c_j = v_j.$$

Отметим, что корректность постановки более общих прямых задач Коши для эволюционного уравнения первого порядка с памятью в конечномерном Гильбертовом пространстве, когда интегральный член связан с производной решения по времени установлена в цикле работ П.Н. Вабищевича, например в работе<sup>4</sup>. Основные проблемы приближенного решения таких нелокальных задач связаны с необходимостью работы с приближенным решением для всех предыдущих моментов времени.

---

<sup>4</sup>Vabishchevich P.N. Approximate solution of the Cauchy problem for a first-order integrodifferential equation with solution derivative memory // Journal of Computational and Applied Mathematics, 2023, 422, 114887

### 3.1 Численное восстановление пространственного множителя правой части уравнения субдиффузии

$${}_0^C D_t^\alpha u = \sum_{m=1}^d \frac{\partial}{\partial x_m} \left( k(\mathbf{x}, t) \frac{\partial u}{\partial x_m} \right) + p(t) f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad 0 \leq t < T,$$

При решении обратной задачи определения стационарной правой части уравнения субдиффузии используем дискретный аналог условия переопределения, который имеет вид

$$u(\mathbf{x}, T) = \phi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \omega_h.$$

При численной реализации дискретного аналога обратной задачи с условием переопределенности для идентификации правой функции источника  $f(\mathbf{x})$  воспользуемся итерационным методом сопряженных градиентов. На каждой итерации решается дискретный аналог корректной прямой задачи с последующим уточнением стационарной правой части.

Схема реализации метода сопряженных градиентов следующая:

1. Задаем  $s = 0$ , где  $s$  – номер итерации.

1.1. Начальное приближение искомой функции  $f_0(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \omega_h$ .

1.2. Найдем решение прямой задачи при заданном начальном условии и принятом  $f_0(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \omega_h$ .

$$y_s^j + r_\alpha A^j y_s^j = \sum_{k=0}^{j-1} c_{j-k} y_s^k + r_\alpha p^j f_s(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \omega_h, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

$$y_s^j(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}, t_j), \quad \mathbf{x} \in \partial\omega_h, \quad j = 0, 1, \dots, N,$$

$$y_s^0(\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \omega.$$

1.3. Вычислить начальную невязку  $r_s(\mathbf{x}) = y_s^N(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \omega_h$  и задаем начальное приближение вспомогательной сеточной функции  $q_0(\mathbf{x}) = r_0(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \omega_h$ .

2. Увеличиваем номер итерации  $s = s + 1$ .

2.1. Решаем дискретный аналог прямой задачи для вспомогательного параболического уравнения,

$$z_s^j + r_\alpha A^j z_s^j = \sum_{k=0}^{j-1} c_{j-k} z_s^k + r_\alpha p^j q_s(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \omega_h, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

$$z_s^j(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\omega_h, \quad j = 0, 1, \dots, N,$$

$$z_s^0(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \omega_h.$$

2.2. Вычисляем значение итерационного параметра  $\alpha_s = (r_s, r_s)/(z_s^N, q_s)$ .

3. Вычислим следующее приближение искомой правой части и невязки по формулам  $f_{s+1} = f_s + \alpha_s q_s$ ,  $r_{s+1} = r_s - \alpha_s z_s^N$ ,  $\mathbf{x} \in \omega_h$ .

4. Найдем значение второго параметра итерации и вычислим вспомогательный вектор,  $\beta_s = (r_{s+1}, r_{s+1})/(r_s, r_s)$ ,  $q_{s+1} = r_s + \beta_s q_s$ ,  $\mathbf{x} \in \omega_h$ .

5. Продолжаем итерационный процесс до тех пор, пока не будет выполнен критерий прекращения итераций  $r_s/\phi < \varepsilon$ , в противном случае возвращаемся к шагу 2, продолжая итерационный процесс.



Поскольку на практике решения прикладных обратных задач, имеем дело с результатами измерения значения дополнительного условия, то вследствие погрешности измерительных приборов (сенсоров), условие переопределения задается с некоторой погрешностью. Коэффициентная обратная задача теплопроводности не исключение, поэтому введем возмущение задаваемого значения решения в финальный момент времени с помощью генератора случайных чисел:

$$\bar{\phi}(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}) + \delta rand(-1, 1),$$

где  $rand(-1, 1)$  – генератор случайных чисел, равномерно распределенных в интервале  $(-1, 1)$ . Также для получения более гладкого решения проведем численные расчеты с использованием к возмущенному финальному условию сглаживающего фильтра Савицкого-Голея<sup>5</sup>.

---

<sup>5</sup>ABRAHAM SAVITZKY and MARCEL J. E. GOLAY. Smoothing and Differentiation of Data by Simplified Least Squares Procedures. Analytical Chemistry. (1964). 36 (8): 1627–39. Bibcode:1964AnaCh..36.1627S. doi:10.1021/ac60214a047

## 3.2 Результаты вычислительного эксперимента

Рассмотрим задание правой части на модельных задачах для уравнения субдиффузии при  $c(x, t) \equiv 1$ ,  $k(x, t) \equiv 1$ :

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T,$$

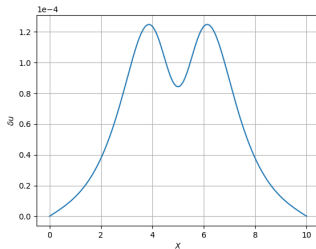
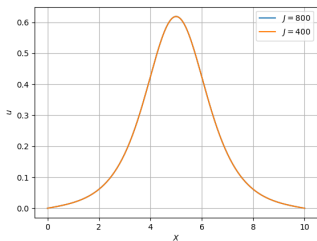
*Модельная задача 1.* Начальное и граничные условия задаются следующим образом

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 0, \quad 0 \leq x \leq l, \\ \mu_1(t) &= 0, \quad \mu_2(t) = 0, \quad 0 \leq t < T, \end{aligned}$$

$$f(x) = e^{-(x-l/2)^2}, \quad 0 \leq x \leq l.$$

Финальное условие переопределения находится путем решения прямой задачи с заданной правой частью на мелкой сетке.

На рис.1 представлены результаты численного решения модельной задачи 1 при  $L = 4$ ,  $T = 1$  на двух пространственно-временных сетках с  $n = 200$ ,  $J = 400$  – грубая сетка и  $n = 400$ ,  $J = 800$ .



**Рис 1:** Финальное условие (слева) и ошибка определения финального условия (справа) на двух сетках.

Расчитаны ошибки восстановления правой части в относительной  $L_2$ -норме и  $L_\infty$ -норме при различных порядках  $\alpha = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$ :

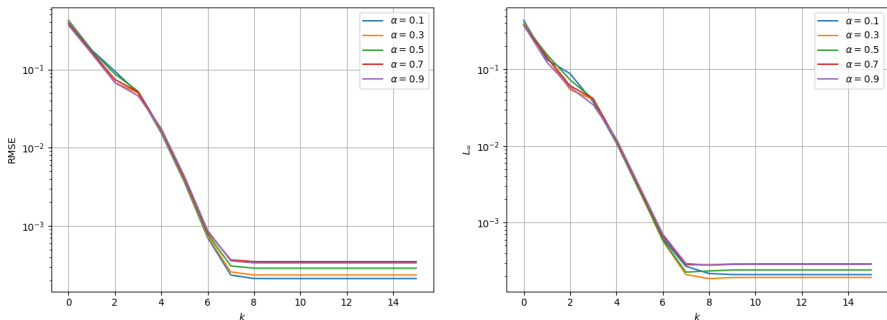
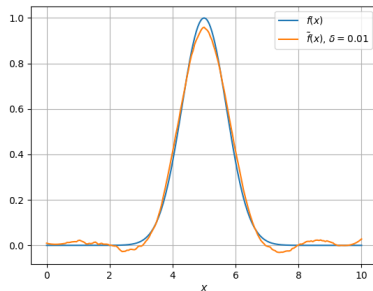
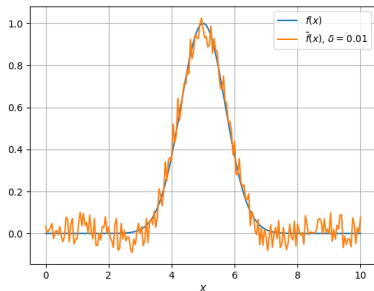


Рис 2: Ошибки в норме  $L_2$  (слева) и  $L_\infty$  (справа) на каждой итерации при различных порядках  $\alpha$ .

Восстановление правой части при  $\alpha = 0.5$ ,  $\delta = 0.01$ ,  $K = 3$ .



**Рис 3:** Графики восстановленной гладкой правой части при наличии «шума» в финальном условии, и при его сглаживании.

Восстановление правой части при  $\alpha = 0.5$ ,  $\delta = 0.05$ ,  $K = 1$ .

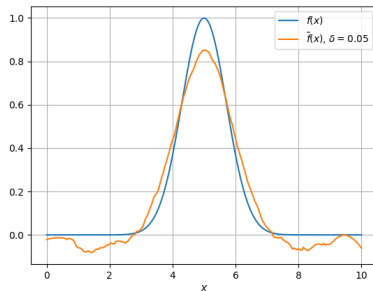
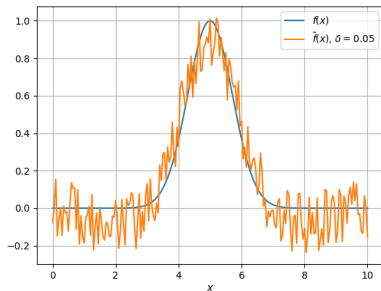
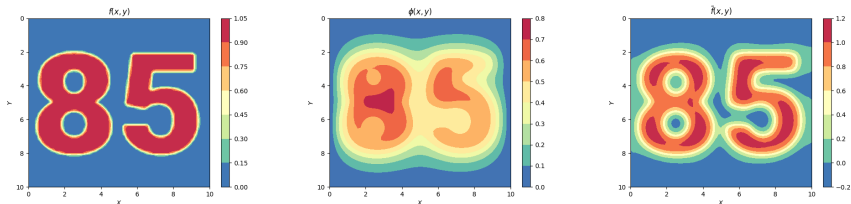


Рис 4: Графики восстановленной гладкой правой части при наличии «шума» в финальном условии, и при его сглаживании.

Решение двумерной задачи с помощью **явной схемы** при  $L = 10$ ,  $N = 64$ ,  
 $M = 2000$ ,  $\tau = 0.2h^2$ ,  $\alpha = 0.7$ ,  $K = 3$



**Рис 5:** Графики точной правой части (слева), решения  $u$  в финальный момент времени (по середине), восстановленной правой части (справа).

## 4.1 Численное восстановление зависящего от времени множителя правой части уравнения субдиффузии

Рассмотрим обратную задачу, когда в уравнении субдиффузии функция  $p(t)$  неизвестна. Дополнительная информация рассматриваемой обратной начально-краевой задачи обычно задается в некоторой внутренней точке  $\bar{\mathbf{x}} \in \Omega$ :

$$u(\bar{\mathbf{x}}, t) = \varphi(t), \quad 0 < t \leq T.$$

В случае нелокального наблюдения в качестве условия переопределения может выступить интеграл

$$\int_{\Omega} \xi(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \varphi(t), \quad 0 < t \leq T.$$

Условие переопределения получается с весовой функцией в виде  $\xi(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})$ , где  $\delta(s)$  – дельта-функция Дирака.

Предположим, что поставленная обратная задача по определению пары  $\{u(x, t), p(t)\}$  является корректной.



Дискретный аналог условия переопределения имеет вид

$$y_{n_*}^j = \varphi(t_j), \quad j = 0, 1, \dots, M,$$

Для определения пары неизвестных функций  $u(x, t)$  и  $p(t)$  привлекается специальная декомпозиция решения на новом временном слое следующего вида:

$$y^j(\mathbf{x}) = v^j(\mathbf{x}) + p^j w^j(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \omega_h.$$

Для вспомогательной функции  $v$  ставится сеточная краевая задача с граничным и начальным условием таким же как для  $y$ .

$$\begin{aligned} v^j + r_\alpha A^j v^j &= \sum_{k=0}^{j-1} c_{j-k} v^k, & \mathbf{x} \in \omega_h, & \quad j = 1, 2, \dots, N, \\ v^j(\mathbf{x}) &= \mu(\mathbf{x}, t^j), & \mathbf{x} \in \partial\omega_h, & \quad j = 0, 1, \dots, N, \\ v^0(\mathbf{x}) &= u_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \omega_h. & \end{aligned}$$

Для вспомогательной функции  $w$  ставится сеточная краевая задача с однородным граничным условием и с однородным начальным условием.

$$\begin{aligned} w^j + r_\alpha A^j v^j &= f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \omega_h, & \quad j = 1, 2, \dots, N, \\ w^j(\mathbf{x}) &= 0, & \mathbf{x} \in \partial\omega_h, & \quad j = 0, 1, \dots, N, \\ w^0(\mathbf{x}) &= 0, & \mathbf{x} \in \omega_h. & \end{aligned}$$

С учетом того, что для  $v$  используется граничное условие искомой задачи, для  $w$  — однородное граничное условие первого рода, при декомпозиции начально-краевая задача выполняется при любом значении  $p^j$ . Из дискретного аналога условия переопределения получаем

$$p^j = \frac{\varphi^j - v_{n_*}^j}{w_{n_*}^j}.$$

Решение  $y(x, t_j)$  на новом временном слое находится излинейной формы, представленной выше.

В случае интегрального условия переопределения имеем

$$p^j = \frac{\varphi^j - \sum_{i \in \mathcal{I}} \xi_i v_i^j}{\sum_{i \in \mathcal{I}} \xi_i w_i^j}, \quad \text{при условии } \sum_{i \in \mathcal{I}} \xi_i w_i^j \neq 0,$$

где под  $\mathcal{I}$  обозначен набор индексов, соответствующих ненулевым весам.

Условие неотрицательности знаменателя при определении значения  $p^j$  обеспечивается знакопостоянностью вспомогательной функции  $w^j(x)$  из принципа максимума для сеточного эллиптического уравнения. Для этого можно наложить соответствующее ограничение на входную функцию  $f(x, t)$ , например  $f(x, t) \geq 0$ .

## 4.2 Вычислительный эксперимент по восстановлению множителя правой части уравнения субдиффузии

### Модельная задача 1

Рассмотрим начально-краевую задачу в единичном интервале,  $l = 1$ ,  $k = 1$ ,  $q = 0$

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = p(t) \sin(\pi x), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1,$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad 0 < t \leq T,$$

Точное значение неизвестной функции  $p(t)$

$$p_e(t) = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3 - \alpha)} t^{2-\alpha}$$

соответствует решению задачи

$$u_e(x, t) = t^2 \sin \pi x.$$

При фиксированном значении шага по пространству  $h = 1/400$  исследуется сходимость ошибки аппроксимации при изменении шага по времени. Для этого рассматриваем следующие ошибки

$$\varepsilon_2^u = \left( \sum_{i=0}^M (u_i^N - u_{e,i}^N)^2 \right)^{1/2}, \quad \varepsilon_\infty^u = \max_{i \in \{0, M\}} |u_i^N - u_{e,i}^N|,$$

$$\varepsilon_2^p = \left( \sum_{j=0}^N (p^j - p_e^j)^2 \right)^{1/2}, \quad \varepsilon_\infty^p = \max_{j \in \{0, N\}} |p^j - p_e^j|,$$

Условие переопределения задается в точке  $x_* = 0.5$ .

В таблице 1 приведены ошибки аппроксимации при различных значениях шага  $\tau = T/N$ ,  $T = 1$ .

Таблица 1: Ошибки аппроксимации.

$\alpha$	$N$	$\varepsilon_2^u$	$\varepsilon_\infty^u$	$\varepsilon_2^p$	$\varepsilon_\infty^p$
0.1	10	3.322e-13	2.787e-14	1.786e-03	6.702e-04
	20	6.766e-13	4.852e-14	7.725e-04	2.066e-04
	40	4.868e-13	3.764e-14	3.334e-04	6.258e-05
	80	6.413e-13	3.697e-14	1.501e-04	1.876e-05
	160	4.553e-13	3.819e-14	8.006e-05	7.448e-06
0.5	10	5.768e-13	3.797e-14	2.579e-02	1.076e-02
	20	6.051e-13	4.674e-14	1.363e-02	4.076e-03
	40	8.162e-13	5.129e-14	7.080e-03	1.522e-03
	80	4.284e-13	3.431e-14	3.641e-03	5.613e-04
	160	2.413e-13	2.121e-14	1.867e-03	2.051e-04
0.9	10	2.012e-13	1.676e-14	1.365e-01	6.181e-02
	20	4.828e-13	4.130e-14	9.264e-02	3.032e-02
	40	9.002e-13	5.873e-14	6.204e-02	1.450e-02
	80	1.929e-13	1.676e-14	4.125e-02	6.850e-03
	160	1.918e-13	1.310e-14	2.734e-02	3.224e-03

## Модельная задача 2

Рассматривается начально-краевая задача в области  $\Omega = [0, 1]$ ,  $k = 1$ ,  $q = 0$ ,  $x_* = 0.5$ :

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = p(t)f(x, t)$$

$$u(0, t) = u(1, 0) = 0,$$

$$u(x, 0) = 0.$$

Пусть множители правой части равны

$$f(x, t) = e^t \sin(\pi x)$$

$$p_e(t) = e^{-t} \sum_{i=0}^5 \left( \frac{t^{i+\alpha}}{\Gamma(1+i+\alpha)} + \pi^2 \frac{t^{i+2\alpha}}{\Gamma(1+i+2\alpha)} \right)$$

Точное решение поставленной задачи имеет вид

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^5 \frac{t^{i+2\alpha}}{\Gamma(1+i+2\alpha)} \sin(\pi x)$$

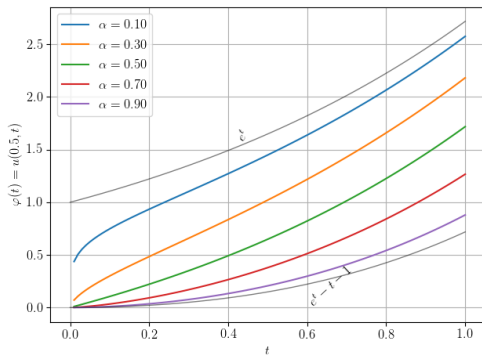


Рис 6: Функция переопределения  $\varphi(t)$ .



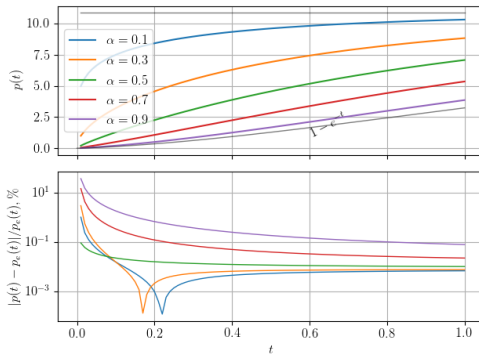
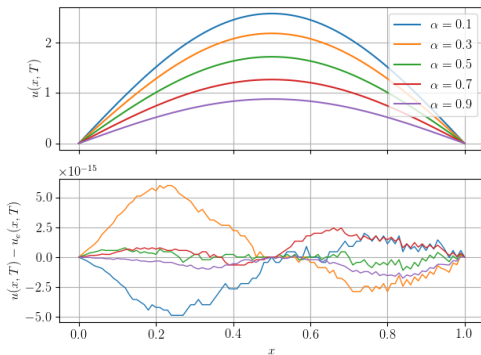


Рис 7: Восстановленная функцию  $p$  (сверху) и относительная ошибка (снизу).



**Рис 8:** Решение  $u$  в финальный момент времени  $T = 1$  в точке  $x_*$  (сверху) и ошибка приближения (снизу).

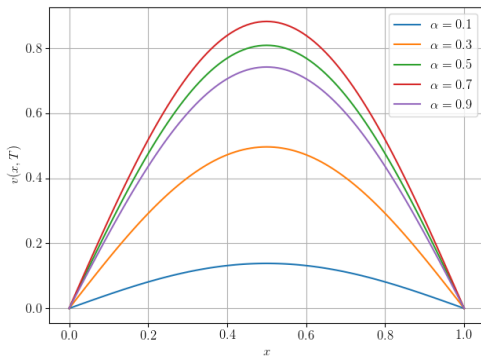
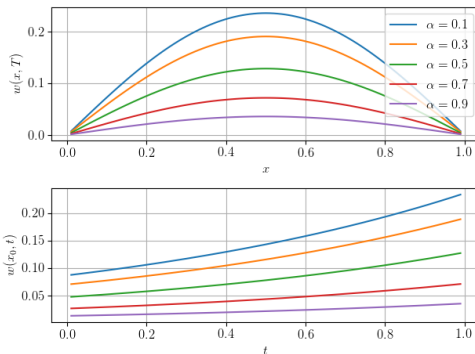


Рис 9: Вспомогательная функция  $v$  в разные моменты времени в точке  $x_0$ .



**Рис 10:** Вспомогательная функция  $w$  в финальный момент времени  $T = 1$  (сверху) и в разные моменты времени в точке  $x_*$  (снизу).

## 5. Заключение

Для определения решения дискретного аналога ретроспективной обратной задачи теплопроводности с неоднородными граничными условиями зависящими от времени предложено использовать итерационный метод сопряженных градиентов, в случае коэффициентной обратной задачи теплопроводности, когда коэффициент зависит только от времени, предлагается использовать специальное декомпозицию решения на новом временном слое.

В работе представлена неявная разностная схема решения обратной задачи идентификации правой части линейного нелокального уравнения субдиффузии с неоднородными граничными условиями зависящими от времени. В качестве условия переопределения задано значение решения в финальный момент времени. Для определения решения поставленной задачи сначала строится дискретный аналог поставленной задачи. Численная реализация дискретного аналога рассматриваемой обратной задачи теплопроводности использован итерационный метод сопряженных градиентов.

В данной работе также построили вычислительный алгоритм для идентификации неизвестного множителя в правой части уравнения субдиффузии, зависящего от времени. Алгоритм базируется в специальной декомпозиции дискретизированного решения на новом временном слое и на решении двух сеточных эллиптических уравнений. Результаты расчета на модельных задачах подтвердили высокую эффективность предложенных методов.

Благодарю за внимание!

vasvasil@mail.ru