



IV НАУЧНАЯ ШКОЛА ДЛЯ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
МНОГОМАСШТАБНЫХ, МУЛЬТИФИЗИЧНЫХ ПРОБЛЕМ  
ОСВОЕНИЯ КРИОЛИТОЗОНЫ**

**ПРОГРАММА / СБОРНИК ТЕЗИСОВ**

15 – 19 июля 2025 г.  
Москва, Россия

## **ОРГАНИЗАТОРЫ**

---

Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук  
Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова  
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана  
Международная научно-исследовательская лаборатория «Многомасштабное математическое моделирование и компьютерные вычисления»  
Лаборатория «Вычислительные технологии моделирования многофизических и многомасштабных процессов криолитозоны»

## **ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ**

---

### **Председатель:**

Эфендиев Я., Ph.D., TA&MU, Колледж-Стейшен, США, СВФУ, Якутск

### **Члены:**

Якобовский М.В., член-корр. РАН, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия  
Вабищевич П.Н., профессор, ИБРАЭ РАН, Москва  
Головизнин В.М., профессор, МГУ, Москва  
Лаевский Ю.М., профессор, ИВММГ СО РАН, Новосибирск  
Сидяев Н.И., профессор, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва  
Ильичев А.Т., профессор, МИАН, Москва

## **ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТ**

---

### **Председатель:**

Васильев В.И., профессор, СВФУ, Якутск

### **Заместители председателя:**

Спирidonов Д.А., к.ф.-м.н., с.н.с. МЛ «ВТММиМПК» СВФУ, Якутск

### **Члены:**

Степанов С.П., к.ф.-м.н., руководитель МЛ «ВТММиМПК» СВФУ  
Лазарев Н.П., д.ф.-м.н., руководитель ЯО РНОМЦ ДЦМИ  
Попова Т.С., д.ф.-м.н., профессор кафедры «АГМАДУ» ИМИ СВФУ  
Пинигина Н.Р., к.ф.-м.н., доцент, директор ИМИ СВФУ  
Васильев М.Д., к.ф.-м.н., доцент, зам. директора ИМИ по науке СВФУ  
Алексеев В.Н., к.ф.-м.н., м.н.с. МЛ «ВТММиМПК» СВФУ  
Аммосов Д.А., к.ф.-м.н., м.н.с. МЛ «ВТММиМПК» СВФУ  
Афанасьева Н.М., к.ф.-м.н., доцент кафедры «ВТ» ИМИ СВФУ  
Григорьев В.В., к.ф.-м.н., м.н.с. МЛ «ВТММиМПК» СВФУ  
Иванов Д.Х., к.ф.-м.н., н.с. МНИЛ «МММиКВ»  
Калачикова У.С., к.ф.-м.н., м.н.с. МЛ «ВТММиМПК» СВФУ  
Никифоров Д.Я., к.ф.-м.н., н.с. МНИЛ «МММиКВ» СВФУ  
Олесова Т.И., лаборант МНИЛ «МММиКВ» ИМИ СВФУ  
Тырылгин А.А., к.ф.-м.н., с.н.с. МЛ «ВТММиМПК»  
Чжан Дун, к.ф.-м.н., СВФУ  
Го Чжэньвэй, к.ф.-м.н., СВФУ

**Место проведения:** Математический институт имени В.А. Стеклова Российской академии наук, ул. Губкина, 8, Москва, Россия. Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, ул. Рубцовская набережная, 2/18, Москва, Россия.

Виртуальная часть конференции проводится с использованием системы видеоконференцсвязи.

**Сайт конференции:** <http://multiscalemr.ru/ru/school25/>

Научная школа для молодых ученых проводится при поддержке Фонда Саймонса, Минобрнауки России (грант на создание и развитие МЦМУ МИАН, соглашение № 075-15-2025-303, и грант СВФУ, соглашение от 11.03.2025 № 075-02-2025-1792) и Российского научного фонда (грант СВФУ № 23-71-30013).

## ПРОГРАММА

### Пленарные доклады

15 июля, вторник

Конференц-зал

---

10.00 – 10.30	Четверушкин Борис Николаевич <i>Об одной кинетической модели описания турбулентных течений</i>
10.30 – 11.00	Шайдуров Владимир Викторович (онлайн) <i>Использование решений разностных схем для последующего повышения порядка сходимости</i>
11.00 – 11.20	<b>Перерыв</b>
11.20 – 11.50	Трахинин Юрий Леонидович <i>О существовании ударных волн в эластодинамике</i>
11.50 – 12.20	Марков Владимир Васильевич*, Кузовлев Дмитрий Игоревич <i>Некоторые вопросы моделирования ячеистой детонации</i>
12.20 – 12.50	Аветисян Арутюн Ишханович, Стрижак Сергей Владимирович* <i>Физически-информированные нейронные сети в механике жидкости и газа</i>
12.50 – 13.20	Титарев Владимир Александрович*, Морозов Алексей Анатольевич <i>Численное моделирование наносекундного испарения в вакуум на основе различных кинетических подходов</i>
13.20 – 14.10	<b>Обед</b>
14.10 – 14.40	Оселедец Иван Валерьевич <i>Machine Learning and Computational Mathematics</i>
14.40 – 15.10	Ерофеев Владимир Иванович <i>Солитоны деформации в упругом стержне: аналитическое исследование, компьютерное моделирование и экспериментальное наблюдение</i>
15.10 – 15.40	Шутяев Виктор Петрович <i>Методы вариационного усвоения данных наблюдений в задачах геофизической гидродинамики</i>
15.40 – 16.00	<b>Перерыв</b>
16.00 – 16.30	Лаевский Юрий Миронович (онлайн) <i>Об аппроксимации разрывных решений уравнения Баклея-Левверетта</i>

---

16.30 – 17.00	Ильин Валерий Павлович <i>Интегрированные многосеточные методы декомпозиции областей для решения многомерных сеточных задач</i>
17.00 – 17.30	Булатов Виталий Васильевич <i>Математическое моделирование волн на границе льда и жидкости: точные решения и асимптотики</i>
17.30 – 18.00	Меньшов Игорь Станиславович <i>Численное моделирование течений газодисперсных сред</i>

**16 июля, среда**

**Конференц-зал**

9.00 – 9.30	Карабасов Сергей Александрович <i>Схема Кабаре для моделирования задач вычислительной аэроакустики и оптимизации проектирования</i>
9.30 – 10.00	Головизнин Василий Михайлович <i>КАБАРЕ</i>
10.00 – 10.30	Нерух Дмитрий Александрович <i>Mechanics of particles for fluid dynamics: derivation of dissipative equations of motion using the principle of least action and fractional derivatives</i>
10.30 – 11.00	Пененко Алексей Владимирович <i>Усвоение данных с идентификацией источников для комплекса моделей химии атмосферы</i>
11.00 – 11.20	<b>Перерыв</b>
11.20 – 11.50	Шаргатов Владимир Анатольевич <i>Задача о распаде разрыва для уравнения Хопфа с невыпуклой функцией потока и обобщенного уравнения Кортевега-де Вриза-Бюргерса</i>
11.50 – 12.20	Чесноков Александр Александрович <i>Внутренние сейши и эволюция волн большой амплитуды в замкнутых резервуарах</i>
12.20 – 12.50	Марчук Андрей Гурьевич <i>Быстрый расчёт распространения трансокеанского цунами с использованием аппаратного ускорителя на базе FPGA</i>

---

12.50 – 13.20 Эглит Маргарита Эрнестовна  
*Пульсационные течения неньютоновских жидкостей в трубах. Влияние предела текучести и не монотонности эффективной вязкости*

---

13.20 – 14.10 **Обед**

---

**17 июля, четверг**

**Конференц-зал**

---

9.00 – 9.30 Вабищевич Петр Николаевич  
*Вычислительная гомогенизация параболических уравнений с эффектами памяти для периодической гетерогенной среды*

---

9.30 – 10.00 Utyuzhnikov Sergey Vladimirovich  
*Non-overlapping near-wall domain decomposition for turbulence modeling*

---

10.00 – 10.30 Song Caiqin  
*Structure preserving quaternion biconjugate residual algorithm with application*

---

10.30 – 11.00 Huang Jian  
*Multicontinuum homogenization for coupled flow and transport equations*

---

11.00 – 11.20 **Перерыв**

---

11.20 – 11.50 Порубов Алексей Викторович  
*Аналитическое и численное моделирование нелинейных процессов деформирования в метаматериале*

---

11.50 – 12.20 Лазарева Галина Геннадьевна  
*Математическая модель для определения термотоков с учетом магнитного поля*

---

12.20 – 12.50 Марчук Игорь Владимирович  
*Моделирование пленочной конденсации пара на ребрах и в каналах*

---

12.50 – 13.20 Рудой Евгений Михайлович  
*Краевые задачи теории упругости в областях с тонкими включениями*

---

13.20 – 14.10 **Обед**

---

18 июля, пятница

Конференц-зал

---

9.00 – 9.30	Кудряшов Николай Алексеевич <i>Тест Пенлеве и аналитические решения уравнения Кортевега-де Вриза-Бюргера с нелинейным источником</i>
9.30 – 10.00	Berloff Pavel <i>Oceanic Vortex Pulsars</i>
10.00 – 10.30	Темирбеков Нурлан Муханович <i>Об одном варианте метода фиктивных областей для уравнений Навье-Стокса</i>
10.30 – 11.00	Хужаёров Бахтиёр Хужаёрович <i>Устойчивость конечно-разностных схем для уравнения диффузии с двучленными дробными производными по времени</i>
11.00 – 11.20	<b>Перерыв</b>
11.20 – 11.50	Сидняев Николай Иванович <i>Задача движения космического аппарата в составе разгонного блока на этапе выведения</i>
11.50 – 12.20	Наседкин Андрей Викторович <i>Стратегии численного расчета эффективности работы пьезо-электрических сенсоров и актуаторов</i>
12.20 – 12.50	Широков Дмитрий Сергеевич <i>On calculation of spin group elements</i>
12.50 – 13.20	Бахолдин Игорь Борисович <i>Структуры разрывов в микрополярной магнитоупругой среде</i>
13.20 – 14.10	<b>Обед</b>

---

19 июля, суббота

МГТУ им. Н.Э. Баумана

---

10.00 – 15.00    Круглый стол и семинар для молодых ученых

---

## Секция «Математические проблемы механики»

16 июля, среда

Конференц-зал

---

14.10 – 14.40	Губайдуллин Ирек Марсович <i>Численное исследование динамического режима окислительной регенерации катализатора гидроочистки</i>
14.40 – 15.10	Кузьмин Александр Григорьевич <i>Особенности трансзвукового обтекания профиля крыла с интерцептором</i>
15.10 – 15.40	Аристова Елена Николаевна <i>Методы высокого порядка для численного решения уравнения переноса частиц или излучения</i>
15.40 – 16.00	<b>Перерыв</b>
16.00 – 16.30	Пескова Елизавета Евгеньевна <i>Вычислительный алгоритм для изучения дозвуковых газопылевых потоков в присутствии лазерного излучения</i>
16.30 – 16.50	Снытников Валерий Николаевич <i>Динамика легких радикалов в газопылевой среде с каталитической конверсией углеводородов</i>
16.50 – 17.10	Литвинов Владислав Львович <i>On one solution of the problem of oscillations of mechanical systems with moving boundaries</i>
17.10 – 17.30	Житников Константин Романович*, Цыпкин Георгий Геннадьевич <i>Влияние граничных условий на устойчивость фронта фазового перехода в геотермальном резервуаре</i>
17.30 – 17.50	Коломийцев Георгий Васильевич <i>Устойчивость неклассических разрывов обобщенного уравнения Кортевега-де Фриза-Бюргера с переменным параметром диссипации</i>

---

---

14.10 – 14.40	Гусев Евгений Леонидович <i>Разработка современных математических методов и обобщенных моделей прогнозирования определяющих характеристик композитов при воздействии экстремальных факторов в рамках вариационных постановок</i>
14.40 – 15.10	Попова Татьяна Семеновна <i>О моделировании тонких отслоившихся включений с локальным повреждением в двумерном упругом теле</i>
15.10 – 15.30	Лазарев Нюргун Петрович <i>Оптимальное управление углом наклона препятствия в контактной задаче для пластины Тимошенко</i>
15.30 – 16.00	<b>Перерыв</b>
16.00 – 16.20	Кравченко Олег Викторович <i>Влияние термически стратифицированного энерговклада на параметры высокоскоростных потоков и генерацию шума</i>
16.20 – 16.40	Федотов Анатолий Александрович <i>Прогнозирование динамики температурного режима вечномерзлого грунта в окрестности магистрального газопровода при изменении климата</i>
16.40 – 17.00	Мастихин Антон Вячеславович <i>Вычисление финальных вероятностей для процессов рождения и гибели с полупрозрачными экранами</i>
17.00 – 17.20	Станкевич Юлия Борисовна <i>Моделирование воздействия внешнего электромагнитного поля на проводящую среду</i>
17.20 – 17.40	Чжан Хаочэнь <i>Численное моделирование процессов газовой динамики с применением одной адаптивной искусственной вязкости для полностью консервативных разностных схем</i>
17.40 – 17.55	Гвоздев Платон Алексеевич <i>Вычисление интегралов с особенностями в задачах механики</i>

---

---

14.10 – 14.40	Филиновский Алексей Владиславович*, Асташова Ирина Викторовна <i>Об управлении температурным режимом в промышленной теплице и его оптимизации</i>
14.40 – 15.00	Баттулга Энхжаргал <i>Разработка сложных композиционных планов для теоретического экспериментирования высокотехнологических процессов</i>
15.00 – 15.20	Коновалов Ярослав Юрьевич <i>Построение вейвлетов на основе одного семейства гармонических атомарных функций</i>
15.20 – 15.35	Приказчиков Даниил Андреевич <i>Математическое моделирование ползучести материалов с памятью</i>
15.35 – 16.00	<b>Перерыв</b>
16.00 – 16.15	Кожурина Полина Ивановна <i>Исследование устойчивости многофазного фильтрационного течения с промежуточным водонасыщенным слоем</i>
16.15 – 16.30	Ващенко Максим Игоревич <i>Задача о поиске простого пути заданной длины между заданными вершинами в неориентированном графе</i>
16.30 – 16.45	Волков Никита Сергеевич <i>Сравнительный анализ сходимости итерационных методов Якоби и Гаусса-Зейделя решения систем линейных алгебраических уравнений</i>
16.45 – 17.00	Федоров Иван Игоревич <i>Применение метода Ньютона для вычисления фильтров обобщённых вейвлетов Мейера</i>

---

16 июля, среда

Ауд. 104

14.10 – 14.40	Василевский Юрий Викторович <i>Численное решение уравнений Навье-Стокса с повышенным порядком точности в движущихся областях и гемодинамические приложения</i>
14.40 – 15.10	Копьев Виктор Феликсович <i>О возможности численного моделирования некоторых задач вихревой динамики в проблеме генерации звука турбулентностью</i>
15.10 – 15.40	Тишкин Владимир Федорович, Ладонкина Марина Евгеньевна* <i>Модификация разрывного метода Галёркина, с использованием базисных функций, зависящих от времени</i>
15.40 – 16.00	<b>Перерыв</b>
16.00 – 16.30	Марчук Николай Гурьевич <i>О некоторых результатах Г.И. Марчука, связанных с ядерной энергией</i>
16.30 – 17.00	Васильев Василий Иванович <i>Вычислительная идентификация коэффициента при младшей производной параболических уравнений</i>
17.00 – 17.20	Афанасьев Никита Александрович <i>Active Flux Methods on Manifolds</i>
17.20 – 17.40	Соловьев Андрей Валерьевич <i>Подход к численному моделированию глобальных течений на сфере, свободный от проблемы полюсов</i>
17.40 – 18.00	Асфандияров Данил Гамилевич <i>Численный метод решения уравнений мелкой воды на основе схемы КАБАРЕ на четырехугольных криволинейных расчетных сетках</i>
18.00 – 18.20	Язовцева Ольга Сергеевна <i>Математическое моделирование нестационарного процесса в слое катализатора с цилиндрической формой зерен</i>

---

14.10 – 14.40	Горобец Андрей Владимирович, Дубень Алексей Петрович* <i>Неприкладная математика, или О нелегком пути в CFD приложения</i>
14.40 – 15.10	Козубская Татьяна Константиновна <i>Семейство квазиодномерных схем повышенной точности для расчета задач газовой динамики на неструктурированных сетках</i>
15.10 – 15.40	Филиппов Александр Сергеевич <i>О применениях параллельных вычислений в математическом моделировании тяжёлых аварий АЭС</i>
15.40 – 16.00	<b>Перерыв</b>
16.00 – 16.20	Глотов Вячеслав Юрьевич <i>Код CABARET-SCI для задач водородной безопасности</i>
16.20 – 16.40	Майоров Павел Александрович <i>Валидация модели CABARET-MFSH на задаче интрузивного течения</i>
16.40 – 17.00	Данилин Александр Вадимович <i>Код CABARET-COMBUSTION для задач водородной пожаро- и взрывобезопасности</i>
17.00 – 17.20	Тиховская Светлана Валерьевна <i>Решение нелинейного сингулярно возмущенного уравнения с двумя параметрами на сетке Шишкина многосеточным алгоритмом</i>
17:20 – 17:40	Ханхасаев Владислав Николаевич <i>Численное моделирование температурного режима резкого нагрева пластины</i>
17.40 – 18.00	Марханов Дмитрий Алексеевич <i>Конечно-разностная дискретизация негидростатических уравнений динамики атмосферы на сетке кубическая сфера, сохраняющая энергию</i>
18.00 – 18.15	Сержантов Артемий Вячеславович <i>Обработка звуковых точек в схеме КАБАРЕ по методу Цзинь-Синь (Jin-Xin)</i>

---

---

14.10 – 14.40	Мухин Сергей Иванович <i>Схема КАБАРЕ в задачах гемодинамики</i>
14.40 – 15.10	Яшина Марина Викторовна <i>Математические модели неоднородных транспортных потоков и методы верификации</i>
15.10 – 15.30	Чернышов Михаил Михайлович <i>Сравнение конечно-элементных аппроксимаций на объединенных сетках Вороного–Делоне для двумерных задач в анизотропной среде</i>
15.30 – 16.00	<b>Перерыв</b>
16.00 – 16.20	Майоров Петр Александрович <i>Явно-неявная схема КАБАРЕ</i>
16.20 – 16.40	Агрелов Илья Николаевич <i>Исследование анизотропии трещиноватых сред при помощи численного моделирования</i>
16.40 – 17.00	Турбылев Михаил Сергеевич <i>Применение схемы Кабаре для решения задач двухфазной гидродинамики</i>
17.00 – 17.20	Яковенко Иван Сергеевич <i>Использование метода КАБАРЕ для анализа газодинамических процессов в реагирующих газовых смесях</i>

---

Секция «Вычислительные методы, машинное обучение, суперкомпьютерные технологии и их приложения»

16 июля, среда

Ауд. 110

---

14.10 – 14.40	Тимонин Владимир Иванович <i>Статистические алгоритмы и непараметрические критерии проверки степенных гипотез Кокса-Лемана в случае полных и прогрессивно цензурированных двух и более выборок</i>
14.40 – 15.10	Гавенко Ольга Юрьевна*, Обершт София Дмитриевна (онлайн) <i>Особенности применения машинного обучения в задаче оценки сложности текста (для русского и английского языков)</i>
15.10 – 15.40	Алиханов Анатолий Алиевич <i>Разработка и анализ разностных схем второго порядка аппроксимации для нелинейных диффузионно-волновых уравнений с запаздыванием</i>
15.40 – 16.00	<b>Перерыв</b>
16.00 – 16.15	Степанов Сергей Павлович <i>Локально-подпространственно-информированные нейронные операторы для GMsFEM</i>
16.15 – 16.30	Шашкин Владимир Валерьевич <i>Модель динамики атмосферы на сетке кубическая сфера</i>
16.30 – 16.45	Стояновская Ольга Петровна <i>Равномерная сходимость численных методов для многомасштабных задач с релаксационными параметрами: теория, пример и прототип инструмента для исследования</i>
16.45 – 17.00	Калачикова Уйгулаана Семеновна <i>Обобщенный многомасштабный метод конечных элементов для многоконтинуальной модели диффузии с дробной производной по времени</i>
17.00 – 17.15	Григорьев Василий Васильевич <i>Homogeneous-heterogeneous pore-scale reactive transport with fractional time derivative</i>
17.15 – 17.30	Аммосов Дмитрий Андреевич <i>Multicontinuum Homogenization for Heterogeneous Poroelastic Media</i>
17.30 – 17.45	Zhang Dong <i>Efficient algorithms for the commutative quaternion equality constrained least squares problem with applications to color image restoration</i>

---

---

17.45 – 18.00 Никифоров Дьулустан Яковлевич  
*Бессеточный многомасштабный метод для решения задачи упругости в многоконтинуальной неоднородной среде*

---

**17 июля, четверг**

**Ауд. 110**

---

14.10 – 14.40 Савин Александр Сергеевич  
*Нейросетевой подход к решению обратной задачи стационарного обтекания неоднородностей потоком тяжелой жидкости со свободной границей*

---

14.40 – 15.00 Новиков Никита Сергеевич  
*Численные методы решения обратных задач акустической томографии*

---

15.00 – 15.15 Спиридонов Денис Алексеевич  
*Многомасштабное математическое моделирование обобщённой задачи Дарси-Форхгеймера в трещиноватых средах*

---

15.15 – 15.30 Guo Zhenwei  
*Fast algorithms for eigenvalues of quaternion matrices and their applications*

---

15.30 – 15.45 Иванов Дьулус Харлампьевич  
*Вычислительный алгоритм продолжения гравитационного поля в сторону аномалий*

---

15.45 – 16.00 **Перерыв**

---

16.00 – 16.15 Bai Huiran  
*Multicontinuum Modeling of Time-Fractional Diffusion-Wave Equation in Heterogeneous Media*

---

16.15 – 16.30 Сивцева Вера Исаевна  
*Аппроксимация данных температуры атмосферы с использованием гармоник Россби и двухстратегического адаптивного алгоритма пчелиной колонии*

---

16.30 – 16.45 Боронина Марина Андреевна  
*Параллельный код для трехмерного моделирования динамики плазмы в открытой ловушке*

---

16.45 – 17.00 Ильина Кюннэй Павловна  
*Численный эксперимент для квазилинейного уравнения “реакции-диффузии”*

---

17.00 – 17.15	Аммосов Альберт Владимирович <i>Численное исследование математической модели течения природного газа в коллекторе в разных постановаках</i>
17.15 – 17.30	Копинцу Илона Иосифовна <i>Моделирование фильтрации цезия-137 с использованием физически - информированной нейронной сети</i>
17.30 – 17.45	Бабенко Богдан Русланович <i>Фрактальное сжатие изображений</i>
17.45 – 18.00	Манаев Алексей Андреевич <i>Комбинация метода декомпозиции области и спектрального преобразования для решения уравнения Пуассона</i>

**18 июля, пятница**

**Ауд. 110**

14.10 – 14.40	Муравлева Екатерина Анатольевна
14.40 – 14.55	Аммосова Ольга Александровна (онлайн) <i>Решение нелинейной обратной задачи теплопроводности для расчета режимов сварки полиэтиленовых труб при низких температурах</i>
14.55 – 15.10	Тырылгин Алексей Афанасьевич (онлайн) <i>Обобщенный многомасштабный метод конечных элементов для задач термопорупругости с фазовыми переходами</i>
15.10 – 15.25	Захарова Мария Николаевна (онлайн) <i>Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния ствола многоствольной скважины</i>
15.25 – 15.40	Кычкина Вилена Григорьевна (онлайн) <i>Численное моделирование напряженно-деформированного состояния магистрального газопровода в многолетнемерзлом грунте</i>
15.40 – 16.00	<b>Перерыв</b>
16.00 – 16.15	Гуринов Айтал Иванович (онлайн) <i>Применение технологий параллельного программирования для моделирования процессов теплопроводности с учетом фазовых переходов</i>

- 
- 16.15 – 16.30 Саввин Антон Васильевич (онлайн)  
*Численный расчет гетерогенной реакции при высоких числах Рейнольдса*
- 
- 16.30 – 16.45 Новгородов Туйгун Александрович (онлайн)  
*Численное моделирование течения несжимаемой жидкости методами разделения уравнений Навье-Стокса и их параллельная реализация*
- 
- 16.45 – 17.00 Кузьминов Александр Александрович (онлайн)  
*Численное исследование напряженно-деформированного состояния упругих тел с концентрациями напряжений*
- 
- 17.00 – 17.15 Алексеев Валентин Николаевич  
*DG-GMsFEM для задачи переноса в двойном континууме в перфорированных областях*
-

## Пленарные доклады

### ОБ ОДНОЙ КИНЕТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ОПИСАНИЯ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Б.Н. Четверушкин \*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия  
\*office@keldysh.ru

Получена замкнутая система уравнений для описания турбулентных течений. В качестве исходной используется 2D модель для описания течения слабо сжимаемого изотермического газа. Приводятся результаты расчета задач о смешении двух плоских потоков, турбулентного течения в плоском канале и истечения горячей струи в окружающий воздух.

### ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РЕШЕНИЙ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ ПОСЛЕДУЮЩЕГО ПОВЫШЕНИЯ ПОРЯДКА СХОДИМОСТИ

В.В. Шайдуров \*<sup>1</sup> Л.В. Гилева<sup>1</sup> Р.А. Голубев<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия  
\*shaidurov04@mail.ru

Будут рассмотрены две разностные схемы: с повышением порядка сходимости от первого до второго и с повышением со второго до четвертого порядка по времени для схемы Кранка-Николсон.

### О СУЩЕСТВОВАНИИ УДАРНЫХ ВОЛН В ЭЛАСТОДИНАМИКЕ

Ю.Л. Трахинин \*<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия  
<sup>2</sup>Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия  
\*trakhin@mat.nsc.ru

Рассматриваются уравнения эластодинамики, описывающие изоэнтропическое течение сжимаемых упругих неогуковских материалов для размерностей пространства  $d = 2$  или  $d = 3$ :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v) = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \operatorname{div}(\rho v \otimes v) + \nabla p - \operatorname{div}(\rho F F^\top) = 0, \\ \partial_t(\rho F_j) + \operatorname{div}(\rho F_j \otimes v - v \otimes \rho F_j) = 0, \quad j = 1, \dots, d, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\rho$  — плотность,  $v \in \mathbb{R}^d$  — скорость,  $F \in \mathbb{M}(d, d)$  — градиент деформации,  $F_j = (F_{1j}, \dots, F_{dj})^\top$  —  $j$ -й столбец  $F$ , а давление  $p = p(\rho)$  — гладкая функция  $\rho$ . Система (1) дополняется  $d$  дивергентными ограничениями  $\operatorname{div}(\rho F_j) = 0$  на начальные данные. Физическое тождество  $\rho \det F = 1$  также является ограничением на начальные данные для задачи Коши. Система (1) возникает как невязкий предел уравнений сжимаемой вязкоупругости типа Олдройда.

Уравнения (1) переписываются в виде квазилинейной симметрической системы, которая является гиперболической, если  $\rho > 0$  и  $p'(\rho) > 0$ . Для гиперболической системы законов сохранения (1) естественно рассматривать возможность существования

кусочно-гладких решений с поверхностью сильного разрыва, являющегося ударной волной. Локальная по времени корректность соответствующей задачи со свободной границей с граничными условиями Ренкина–Гюгонио необходима для реального существования ударной волны. В докладе обсуждается нахождение условий существования ударных волн в двумерной эластодинамике ( $d = 2$ ) как энергетическим [1], так и спектральными методами [2]. Также кратко обсуждаются недавние результаты [3] для общего трехмерного случая ( $d = 3$ ).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 24-21-00192).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Morando A., Trakhinin Y., Trebeschi P. *Structural stability of shock waves in 2D compressible elastodynamics*. Math. Ann. 2020. V. 378. No. 3-4. P. 1471–1504.
- [2] Trakhinin Y. *On weak stability of shock waves in 2D compressible elastodynamics*. J. Hyperbolic Differ. Equ. 2022. V. 19. No. 1. P. 157–173.
- [3] Shafeev A., Trakhinin Y. *Three-dimensional structural stability of shock waves in elastodynamics*. Submitted.

### НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЯЧЕИСТОЙ ДЕТОНАЦИИ

Д.И. Кузовлев<sup>1</sup> В.В. Марков \*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия

\*markov@mi-ras.ru

Детонация многокомпонентных газовых смесей – сложный многомерный нестационарный физико-химический процесс. Экспериментально установлено, что на фронте волны детонации имеется множество изломов, перемещающихся вдоль него и взаимодействующих между собой. Для экспериментального исследования детонации используется следовой метод, позволяющий регистрировать на закопченных стенках канала траектории точек изломов, которые образуют ромбовидные ячейки. Сложная ударно-волновая структура течения формируется благодаря развитию неустойчивости зоны горения за головной ударной волной и ячеистая детонация распространяется в самоподдерживающемся режиме за счет микровзрывов при столкновении поперечных волн. При теоретическом исследовании одной из задач является определение размеров детонационных ячеек, поскольку их соответствие размерам ячеек, наблюдаемым в реальных экспериментах, принято считать критерием качества, как математической модели процесса, так и метода исследования. В докладе на конкретных примерах численных решений задач будет представлено влияние геометрии течения, диссипативных процессов и размеров расчетных ячеек на следовую картину и размер детонационных ячеек.

### ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАНОСЕКУНДНОГО ИСПАРЕНИЯ В ВАКУУМ НА ОСНОВЕ РАЗЛИЧНЫХ КИНЕТИЧЕСКИХ ПОДХОДОВ

В.А. Титарев\*<sup>1</sup> А.А. Морозов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

<sup>2</sup>ИТ СО РАН, Новосибирск, Россия

\*vladimir.titarev@frccsc.ru

Практически важным примером сложного нестационарного течения разреженного газа является разлет газового облака в окружающее пространство вследствие испарения с твердой поверхности, вызванного наносекундным лазерным облучением умеренной

интенсивности. В процессе испарения образуется быстро расширяющееся газовое облако, так что течение состоит из быстро движущейся волны разрежения и сжатия, а также областей сильного разрежения и перемешивания. В приложениях требуется построить картину течения на временах, равных сотням или тысячам времен испарения. Для сравнения с экспериментом необходимо рассчитывать так называемые времяпролетные (time-of-flight) и угловые распределения разлетающихся частиц, что требует определения энергии тех частиц, вектор скорости которых лежит в конусе с малым углом полураствора.

Рассматриваемая задача является примером сложного нестационарного течения разреженного газа, для численного анализа которого требуется не только высокоточный расчет макропараметров газа (поля течения), но и функции распределения молекул по скоростям. Численное решение данной задачи разными подходами может быть включено в базу эталонных решений задач при условии использования различных вычислительных подходов.

В настоящей работе процесс абляции в вакуум с пятна круглой формы анализируется с помощью двух подходов: методом прямого статистического моделирования, реализованном в коде “LasInEx” (Laser-Induced-Expansion, автор А.А. Морозов) и численным решением кинетического уравнения Бхатнагара-Гросса-Крука с использованием кода “Несветай” (автор В.А. Титарев). Будут представлены поля течения для различных времен, сравнение средних энергий испаренных молекул, времяпролетных и угловых характеристик.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №25-11-00359). Численное решение кинетического уравнения строилось с использованием инфраструктуры Центра коллективного пользования “Высокопроизводительные вычисления и большие данные” (ЦКП “Информатика”) ФИЦ ИУ РАН.

## **СОЛИТОНЫ ДЕФОРМАЦИИ В УПРУГОМ СТЕРЖНЕ: АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ, КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ НАБЛЮДЕНИЕ**

В.И. Ерофеев \*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт проблем машиностроения РАН — филиал ФГБНУ «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики им. А.В. Гапонова–Грехова Российской академии наук», Нижний Новгород, Россия

\*erof.vi@yandex.ru

Обсуждаются основные математические модели динамики упругого стержня, позволяющие описать формирование солитонов деформации, их эволюцию, а также попутное и встречное взаимодействия. Выявлены условия, при которых взаимодействие солитонов реализуется по неклассическим сценариям (неупругое взаимодействие, эффект расщепления солитонов при столкновении и другие). Продемонстрированы результаты физических и компьютерных экспериментов по генерации солитонов деформации и их взаимодействию.

## **ОБ АППРОКСИМАЦИИ РАЗРЫВНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ БАКЛЕЯ-ЛЕВЕРЕТТА**

Ю.М. Лаевский\*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия

\*laev@labchem.sccc.ru

Цель данной работы состоит не столько в развитии методов аппроксимации устойчивых разрывных решений законов сохранения с потоком Баклея-Левретта, сколько в накоплении “неприятных” экспериментальных данных при использовании некоторых разностных схем. Еще в 70-х годах прошлого века было замечено, что численное решение уравнения Баклея-Левретта, полученное по схеме Лакса-Вендроффа приближает неустойчивое решение. Следовало бы проверить постоянство скорости распространения разрыва, постоянство параметра, отвечающего за выбор конкретного неустойчивого решения из всего семейства, и пр. Этому вопросу, в частности, посвящен данный доклад. В докладе продемонстрировано, что выбор сеточных параметров зависит только от числа Куранта – при различных шагах с одним и тем же числом Куранта приближается одно и то же неустойчивое решение. Далее, рассмотрена схема с весами, как некоторое обобщение схемы КАБАРЕ. При некоторых значениях весов схема выигрывает по точности у схемы “явный” уголок” и при числах Куранта больших 0.5 в отличие от модифицированной схемы КАБАРЕ является монотонной. В конце доклада приводится проекционная форма схемы КАБАРЕ. Фактически используется метод конечных элементов, но в весьма специфической форме – триангуляции подвергнута пространственно-временная плоскость.

## **ИНТЕГРИРОВАННЫЕ МНОГОСЕТОЧНЫЕ МЕТОДЫ ДЕКОМПОЗИЦИИ ОБЛАСТЕЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ СЕТОЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ**

В.П. Ильин\*

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,  
Новосибирск, Россия

[ilinin@sscc.ru](mailto:ilinin@sscc.ru)

Исследуются интегрированные многосеточные методы декомпозиции областей (DDM-MG) для решения больших систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с разреженными симметричными положительно определенными (с.п.о.) матрицами, получаемых при сеточных аппроксимациях многомерных краевых задач. Предлагаемые алгоритмы основаны на построении однослойных или двухслойных макросеток и специальной упорядоченности узлов по их принадлежности различным топологическим примитивам макросетки: макроузлам, макроребрам, макрограням и подобластям. При согласованной нумерации векторных компонент матрица СЛАУ в трехмерном случае принимает блочно-трехдиагональную форму четвертого порядка. Для ее решения используется какой-либо метод приближенной факторизации в подпространствах Крылова. При этом решение вспомогательных систем в подобластях осуществляется многосеточными методами блочной неполной факторизации, на основе аналогичной топологически ориентированной упорядоченности узлов, но не на макро-, а на микроуровне, в результате чего формируется единый предобуславливатель рекурсивно-вложенного типа. Обоснование предложенных методов проводится для с.п.о. матриц.

## **МЕТОДЫ ВАРИАЦИОННОГО УСВОЕНИЯ ДАННЫХ НАБЛЮДЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ГЕОФИЗИЧЕСКОЙ ГИДРОДИНАМИКИ**

В.П. Шутяев\*<sup>1,2</sup> В.И. Агошков<sup>1,3</sup> В.Б. Залесный<sup>1</sup> Е.И. Пармузин<sup>1,2</sup> Н.Б. Захарова<sup>1</sup>  
Т.О. Шелопут<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Институт вычислительной математики им. Г.И. Марчука РАН, Москва, Россия

<sup>2</sup>Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия

<sup>3</sup>Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

\*[victor.shutyaev@mail.ru](mailto:victor.shutyaev@mail.ru)

Представлено современное состояние исследований в области вариационного усвоения данных наблюдений в моделях динамики океана, развиваемых в ИВМ РАН. Разработанная технология четырехмерного вариационного усвоения данных (4D-Var) базируется на методе многокомпонентного расщепления математической модели динамики океана и минимизации функционала стоимости, связанного с данными наблюдений, путем решения системы оптимальности, включающей сопряженные уравнения и ковариационные матрицы ошибок наблюдений и начального приближения. Предложены эффективные алгоритмы решения вариационных задач усвоения данных на основе итерационных процессов с использованием прямых и сопряженных уравнений со специальным выбором итерационных параметров, а также алгоритмы исследования чувствительности характеристик модели к ошибкам данных наблюдений. Методология иллюстрируется для модели гидротермодинамики Балтийского моря с вариационным усвоением данных для восстановления тепловых потоков на поверхности моря.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 19-71-20035-П).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Marchuk G.I.* Adjoint Equations and Analysis of Complex Systems. Springer. Dordrecht, 1995
2. *Zalesny V.B., Agoshkov V.I., Shutyayev V.P., Le Dimet F.-X., Ivchenko B.O.* Numerical modeling of ocean hydrodynamics with variational assimilation of observational data. *Izv. Atmos. Ocean. Phys.* 2016 V. 52 P. 431-442.
3. *Shutyayev V.P.* Methods for observation data assimilation in problems of physics of atmosphere and ocean. *Izv. Atmos. Ocean. Phys.* 2019 V. 55 P. 17-31.
4. *V.P. Shutyayev, Le Dimet F.-X.* Sensitivity of functionals of variational data assimilation problems. *Doklady Mathematics*, 2019, 99(3), 295-298.
5. *Shutyayev V., Agoshkov V., Zalesny V., Parmuzin E., Zakharova N.* 4D Technology of variational data assimilation for sea dynamics problems. *Supercomputing Frontiers and Innovations*, 2022, 9 (1), 4-16.
6. *Shutyayev V., Zalesny V., Agoshkov V., Parmuzin E., Zakharova N.* Four-dimensional variational data assimilation and sensitivity of ocean model state variables to observation errors. *J. Mar. Sci. Eng.*, 2023, 11, 1253
7. *Агошков В.И., Шутяев В.П., Пармузин Е.И., Захарова Н.Б., Шелонут Т.О.* Методы вариационного усвоения данных наблюдений в задачах геофизической гидродинамики. *ЖВМ и МФ*, 2025, №6, 1378-1391.

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛН НА ГРАНИЦЕ ЛЬДА И ЖИДКОСТИ: ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ И АСИМПТОТИКИ

В.В. Булатов \*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

\*[internalwave@mail.ru](mailto:internalwave@mail.ru)

Изучение волновых процессов в море с плавающим ледяным покровом актуально для изучения его реакции на различные гидродинамические возмущения, движущиеся надводные и подводные суда, процессы распада ледяных полей в интересах судоходства, а также совершенствования методов дистанционного зондирования поверхности ледяного покрытия. Поверхностные возмущения ледяного покрова, которые могут быть зарегистрированы с помощью специальных радиолокационных и оптических систем, несут информацию не только об источниках возмущений, но и о характеристиках морской среды подо льдом. Плавающий ледяной покров, определяющий динамическое взаимодействие между океаном и атмосферой, влияет на динамику не только морской поверхности, но и подповерхностных вод, так как в общем движении по вертикали участвует как ледяной покров, так и вся масса жидкости под ним. Целью работы является ре-

шение задачи о построении асимптотик дальних волновых возмущений ледяного покрова, возбуждаемых локализованными источниками. Численный анализ решений показал, что основными параметрами, которые могут приводить к существенной изменчивости качественных характеристик дисперсионных соотношений, являются толщина льда и скорость потока. Построенные асимптотики дальних полей дают возможность эффективно рассчитывать основные характеристики волновых возмущений на границе раздела ледяного покрова и качественно анализировать полученные решения. Полученные асимптотические результаты с различными значениями входящих в них физических параметров позволяют провести оценку характеристик возмущений ледяного покрова, наблюдаемых в реальных морских условиях и рассчитывать дальние волновые поля, в том числе, и от нелокальных источников возмущений различной физической природы. В результате проведения модельных многовариантных расчетов по асимптотическим формулам смоделированная волновая система может быть приближена к наблюдаемым в натуральных условиях волновым картинам, что дает возможность оценить физические параметры реальных источников в морской среде с ледовым покрытием и определить основные характеристики начальных возмущений, варьируя модельные значения исходных параметров. Таким образом, модели волновой генерации на поверхности раздела морской воды и льда могут быть не только верифицированы, но и использованы для проведения прогнозных оценок. Работа выполнена при теме государственного задания № 124012500442-3.

## **ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ ГАЗОДИСПЕРСНЫХ СРЕД**

И.С. Меньшов \*<sup>1</sup> М.Ю. Немцев<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия

<sup>2</sup>НИЦ “Курчатовский институт” – НИИСИ, Москва, Россия

\*menshov@kiam.ru

Обсуждаются вопросы, связанные с построением математических моделей и численных методов для решения задач динамики двухфазной газодисперсной среды, представляющей собой смесь газа и мелких включений (частиц). Частицы предполагаются абсолютно жесткими, несжимаемыми и недеформируемыми. В качестве математической модели используется неравновесная континуальная модель Рахматулина – Нигматулина. Доказывается, что она совпадает с моделью Байера-Нунзиато с нелокальной релаксацией. На основе расщепления по физическим процессам предлагается дискретная модель, сводящаяся на каждом шаге по времени к решению двух строго гиперболических и консервативных подсистем уравнений. Для численного решения этих подсистем используются разностные схемы гоудновского типа на основе приближенных решений задачи Римана типа HLL и HLLC. Предложенный численный метод верифицируется на задачах о переносе слоя частиц и релаксации скорости в безграничном двухфазном потоке. Рассматривается также задач Седова о точечном взрыве в газодисперсной среде, для которой строится частное автомодельное решение, служащее референсным в сравнительном анализе с двумерными расчетами.

## **СХЕМА КАБАРЕ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЗАДАЧ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ АЭРОАКУСТИКИ И ОПТИМИЗАЦИИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ**

С.А. Карабасов \*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Центральный аэрогидродинамический институт, Москва, Россия

\*skarabasov@gmail.com

Разработка высокоточных методов компьютерного проектирования для ускоренных вычислений на современных компьютерах становится важным элементом инструментария для проектирования гражданских летательных аппаратов, удовлетворяющих жестким экологическим требованиям. В частности, снижение шума на местности остается актуальной практической проблемой, которую сейчас необходимо решать на уровне концептуального проектирования новых самолетов и вертолетов, оптимизируя как аэродинамические, так и аэроакустические характеристики. Для таких задач характерны очень большие числа Рейнольдса, что соответствует широкому диапазону пространственно-временных масштабов акустических пульсаций с учетом высоких частот, важных для порога слышимости человека. Ключевым элементом математического моделирования в этом случае являются вычислительные методы высокого разрешения, эффективно реализованные на современных компьютерных архитектурах. В настоящем докладе будут рассмотрены примеры вихре-разрешающих расчетов, ускоренных на графических платах с использованием технологии вложенных сеток типа восьмидерева на основе алгоритмов схемы Кабаре для газовой динамики, изначально предложенных В.М. Головизниным в приложении для расчетов шума реактивных струй в компоновке и шума взаимодействия винта и крыла.

### КАБАРЕ

В.М. Головизнин \*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

\*gol@ibrae.ac.ru

Обсуждается состояние разработки балансно-характеристических алгоритмов нового поколения для численного решения систем уравнений гиперболического типа.

### MECHANICS OF PARTICLES FOR FLUID DYNAMICS: DERIVATION OF DISSIPATIVE EQUATIONS OF MOTION USING THE PRINCIPLE OF LEAST ACTION AND FRACTIONAL DERIVATIVES

Georgii Koniukov<sup>1</sup> Dmitry Nerukh \*<sup>2</sup>

<sup>1</sup>University of Montpellier, 34090 Montpellier, France

<sup>2</sup>Aston University, Birmingham, UK

\*D.Nerukh@aston.ac.uk

Equations of motion for systems with forces proportional to velocity are derived from the principle of least action using classical Euler-Lagrange equation and Lagrangian that contains terms responsible for energy dissipation. These terms are expressed through fractional derivatives of the coordinate of order  $0 < \alpha < 1$ .

This approach naturally leads to the introduction of non-uniform flow of time in dissipative processes. It incorporates inhomogeneous velocity without unphysical approximations. The fractional term in the Lagrangian provides correct Euler-Lagrange and, ultimately, Hamilton equations with energy dissipation rate defined by  $\alpha$ .

Smooth, gradual transition from classical mechanics (for example, Molecular Dynamics of point masses) to fluid dynamics (Navier-Stokes) can be realised using this approach.

### УСВОЕНИЕ ДАННЫХ С ИДЕНТИФИКАЦИЕЙ ИСТОЧНИКОВ ДЛЯ КОМПЛЕКСА МОДЕЛЕЙ ХИМИИ АТМОСФЕРЫ

А.В. Пененко\*<sup>1</sup> Е.В. Русин<sup>1</sup> Э.А. Пьянова<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия

\*aleks@ommgp.sccc.ru

Процессы изменения химического состава атмосферы, описываемые нелинейными уравнениями типа адвекции-диффузии-реакции, характеризуются высокой неопределенностью и изменчивостью. Для оценки и прогнозирования их состояния разрабатываются алгоритмы усвоения данных мониторинга. Задача усвоения данных формулируется как последовательность связанных обратных задач с учетом поступающих в ходе моделирования данных измерений. Усвоение данных осуществляется вместе с идентификацией функции источника. Для решения обратных задач последовательности используется алгоритм на основе операторов чувствительности. Алгоритм позволяет работать как с линейными, так и нелинейными операторами измерений [1].

Использование сложных в вычислительном плане моделей в алгоритмах обратного моделирования, которые зачастую требуют многократного решения прямых и сопряженных задач, может быть затруднительно с практической точки зрения. Разработана модификация алгоритма, задействующая две модели: «детальную» и «упрощенную» [2]. «Детальная» модель используется в режиме прямого моделирования, а для уточнения её ключевых параметров по данным наблюдений используется «упрощенная» модель. При этом возникает задача предварительной подстройки «упрощенной» модели. Алгоритмы тестируются на региональных и городских сценариях оценки качества воздуха по данным мониторинга.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Penenko A. V., Penenko V. V., Tsvetovaa E. A. Data Assimilation Algorithms for Atmospheric Chemistry Models // *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*. 2025. Т. 61(3). С. 378–390.
2. Пененко А. В., Антохин П. Н., Бакланов А. А., Пененко В. В. Использование комплекса моделей разной сложности в задачах обратного моделирования процессов переноса и трансформации примесей в атмосфере // *Метеорология и гидрология*. 2025. №6, С. 67–78.

### ЗАДАЧА О РАСПАДЕ РАЗРЫВА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ХОПФА С НЕВЫПУКЛОЙ ФУНКЦИЕЙ ПОТОКА И ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ВРИЗА-БЮРГЕРСА

В.А. Шаргатов \*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, Россия  
\*shargatov@mail.ru

Исследованы решения задачи о распаде разрыва для обобщенного уравнения Кортевега-де Вриза-Бюргерса и уравнения Хопфа в случае, если функция потока имеет больше, чем одну точку перегиба. Показано, что при четырех точках перегиба могут существовать два решения в виде бегущей волны с монотонной структурой, которые являются линейно устойчивыми и соответствуют недосжатым ударным волнам. Доказана теорема о том, что если функция потока имеет две точки перегиба, то существует не более одного решения с монотонной структурой недосжатой ударной волны. Линейная устойчивость этих решений для обобщенного уравнения Кортевега-де Вриза-Бюргерса исследована методом функции Эванса. Установлено, что допустимый разрыв (решение в виде бегущей волны для уравнения Хопфа) соответствует либо устойчивому решению в виде бегущей волны для обобщенного уравнения Кортевега-де Вриза-Бюргерса, либо пульсирующему решению с эффективной шириной, сравнимой с эффективной шириной структуры бегущей волны. Множество допустимых разрывов может быть найдено, если известны скорости всех решений в виде недосжатой ударной волны с монотонной структурой.

## **ВНУТРЕННИЕ СЕЙШИ И ЭВОЛЮЦИЯ ВОЛН БОЛЬШОЙ АМПЛИТУДЫ В ЗАМКНУТЫХ РЕЗЕРВУАРАХ**

А.А. Чесноков \*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия  
\*chesnokov@hydro.nsc.ru

Во многих акваториях в течение сезона с температурной стратификацией наблюдаются внутренние волны. Хотя истинная стратификация водной толщи непрерывна, разумной идеализацией является аппроксимация с двумя или более изотермическими слоями. Ветровая нагрузка приводит к «накоплению» воды на подветренной стороне водоема. Малое изменение глубины жидкости создает градиент давления, вызывающий компенсирующее смещение внутренних изотерм порядка нескольких метров. Когда ветер прекращается, наклонные внутренние границы начинают колебаться, создавая волны большой амплитуды.

Длинноволновая модель распространения внутренних волн большой амплитуды в слоистой жидкости применена для описания сейшевых колебаний, нелинейной трансформации волн и турбулентного перемешивания в замкнутых резервуарах. Проведен расчет эволюции сейшевых колебаний большой амплитуды, при которых возникает сдвиговая неустойчивость. Показано, что результаты расчетов для рассматриваемых задач находятся в хорошем соответствии с экспериментальными данными и прямым численным моделированием. Результаты показывают применимость модели для описания эволюции внутренних волн под действием ветра.

## **БЫСТРЫЙ РАСЧЁТ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТРАНСОКЕАНСКОГО ЦУНАМИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АППАРАТНОГО УСКОРИТЕЛЯ НА БАЗЕ FPGA**

М.М. Лаврентьев<sup>1</sup> Ан.Г. Марчук \*<sup>1,2</sup> К.К. Облаухов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт автоматки и электрометрии СО РАН, Новосибирск, Россия

<sup>2</sup>Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия  
\*mag@omzg.sccc.ru

После достаточно сильного сейсмического события многие страны и исследовательские центры запускают сложные расчеты для оценки параметров волны цунами в определенных частях побережья, чтобы определить, оправдано ли объявление тревоги цунами. Это требует больших вычислительных мощностей, сравнимых по производительности с суперкомпьютером. В работе показано, как специально разработанный аппаратный ускоритель на основе микрочипа Field Programmable Gates Array (FPGA) для ПК, может вести расчет распространения трансокеанского цунами со скоростью суперкомпьютера. Такие расчеты дают надежные результаты в течение нескольких минут и позволяют получить распределение ожидаемых высот волны цунами вдоль побережья. В работе представлен расчет распространения волны цунами через Тихий океан на персональном компьютере с использованием аппаратного ускорения выполнения компьютерного кода на основе FPGA. При этом время расчёта на достаточно детальной сетке на порядок меньше реального времени движения волны через океан.

## **ПУЛЬСАЦИОННЫЕ ТЕЧЕНИЯ НЕНЬЮТОНОВСКИХ ЖИДКОСТЕЙ В ТРУБАХ. ВЛИЯНИЕ ПРЕДЕЛА ТЕКУЧЕСТИ И НЕ МОНОТОННОСТИ ЭФФЕКТИВНОЙ ВЯЗКОСТИ**

М.Э. Эглит \*<sup>1</sup> Ю.А. Дроздова<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

Российский государственный университет нефти и газа имени И.М. Губкина, Москва,  
Россия

\*m.eglit@mail.ru

Неньютоновскими называют жидкости, эффективная вязкость которых зависит от скорости деформаций. Многие неньютоновские жидкости обладают пределом текучести – ведут себя как твердые тела, пока интенсивность касательных напряжений меньше некоторой величины, называемой пределом текучести, и текут как жидкости, когда интенсивность касательных напряжений превосходит предел текучести. Такие жидкости широко распространены в природе и используются во многих областях практической деятельности. Математическое моделирование течений таких жидкостей - важная и актуальная задача. Особая трудность при этом связана с нелинейностью реологических соотношений и возможностью появления в потоках заранее не известных областей, движущихся без деформирования. В докладе на примере течений в трубах, происходящих под действием периодически меняющегося перепада давления, демонстрируются эффекты наложения пульсаций перепада давления на стационарный поток неньютоновских жидкостей с различными реологическими свойствами. Результаты получены с использованием численного моделирования.

## **ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ГОМОГЕНИЗАЦИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ЭФФЕКТАМИ ПАМЯТИ ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ГЕТЕРОГЕННОЙ СРЕДЫ**

П.Н. Вабищевич \*<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

<sup>2</sup>СКФУ, Ставрополь, Россия

\*vab@cs.msu.ru

В теории гомогенизации математические модели на макроуровне строятся на основе решения вспомогательных краевых задач на микроуровне в пределах одной ячейки периодичности. Эти задачи формулируются с помощью асимптотических разложений решения по малому параметру, который представляет собой характерный размер пространственной неоднородности. При изучении уравнений диффузии с контрастными коэффициентами особое внимание уделяется нелокальным моделям со слабопротяженными включениями. В этом случае процессы макроуровня описываются интегро-дифференциальными уравнениями, где разностное ядро определяется решением нестационарной задачи на ячейке.

Целью данной работы является разработка вычислительного алгоритма для гомогенизации нестационарных процессов с учетом эффектов памяти. Эффективный диффузионный тензор вычисляется с помощью стандартной численной процедуры, основанной на дискретизации пространства методом конечных элементов. Ядро памяти аппроксимируется суммой экспонент, полученных из решения частичной спектральной задачи на ячейке периодичности. Нелокальная задача макроуровня преобразуется в локальную, где эффекты памяти учитываются через решение вспомогательных нестационарных задач. Используются стандартные двухслойные схемы дискретизации по времени, доказана безусловная устойчивость дискретных решений в соответствующих нормах. Ключевые аспекты предлагаемой технологии вычислительной гомогенизации иллюстрируются путем решения двумерной модельной задачи.

# NON-OVERLAPPING NEAR-WALL DOMAIN DECOMPOSITION FOR TURBULENCE MODELING

S.V. Utyuzhnikov \*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>University of Manchester, Manchester, the United Kingdom

\*s.utyuzhnikov@manchester.ac.uk

The resolution of near-wall turbulent boundary layer is still a hot topic in fluid dynamics. It is well-known that the resolution of a tiny near-wall region requires the most computational time. Conversely, engineering approaches based on wall functions avoid detailed resolution of the near-wall region. However, they can be too inaccurate and empirical.

The non-overlapping domain decomposition method (NDD) proved to be quite efficient in tackling the problem in question when the model of the RANS equations is exploited. The proposed method is much more universal than conventional approaches based on the wall functions because it does not require any free parameters to be tuned. In this approach the computational domain is split into two non-overlapping domains: inner and outer regions. A key problem is related to the interface boundary conditions (IBCs). IBCs are obtained using the transfer of the boundary conditions from the wall to the interface boundary. It is important that they can be obtained without the solution of the problem in the outer region. This results in IBC that are nonlocal and of Robin type. This approach has been efficiently applied to the RANS-LES decomposition. It is demonstrated that the well-known log-layer mismatch is practically eliminated. The accuracy of prediction is much better than that of the coarse LES and comparable with the resolved LES. Finally, the extension of NDD to essentially unsteady problems are also discussed.

## STRUCTURE PRESERVING QUATERNION BICONJUGATE RESIDUAL ALGORITHM WITH APPLICATION

Caiqin Song

School of Mathematical Sciences, University of Jinan, Jinan 250022, P. R. China

songcaiqln1983@163.com

Many recent color image encryption models are mathematically characterized by a numerical solution problem of quaternion matrix equation. In this talk, the quaternion biconjugate residual (QBCR) algorithm is firstly provided by means of a new real representation of quaternion matrix for solving the numerical solution of the equation  $AY = E$ . The necessary and sufficient conditions for the above solutions existing is provided. It is demonstrated that our QBCR method can achieve to converge to the exact solution within a finite number of iteration steps in the absence of round-off errors when it is consistent. Moreover, the proposed method has been used to solve color image encryption problem and its encryption performance is evaluated from four different aspects. All parameters are found to be close to the ideal values, confirming the effectiveness of QBCR encryption scheme and the accuracy of the theoretical results obtained.

## MULTICONTINUUM HOMOGENIZATION FOR COUPLED FLOW AND TRANSPORT EQUATIONS

Jian Huang<sup>1</sup>

<sup>1</sup>National Center for Applied Mathematics in Hunan & Xiangtan University, China

\*huangjian213@xtu.edu.cn

In this talk, we present the derivation of a multicontinuum model for the coupled flow and transport equations by applying multicontinuum homogenization. We perform the multicontinuum expansion for both flow and transport solutions and formulate novel coupled constraint cell problems to capture the multiscale property, where oversampled regions are utilized to avoid

boundary effects. Assuming the smoothness of macroscopic variables, we obtain a multicontinuum system composed of macroscopic elliptic equations and convection-diffusion-reaction equations with homogenized effective properties. Finally, we present numerical results for various coefficient fields and boundary conditions to validate our proposed algorithm.

## **АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ В МЕТАМАТЕРИАЛЕ**

А.В. Порубов \*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия

\*alexey.porubov@gmail.com

Динамические нелинейные деформационные процессы в метаматериале описываются связанными нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных. Эти уравнения являются неинтегрируемыми, даже частные решения для них не всегда удается получить. Поэтому встает вопрос об асимптотическом упрощении уравнений и нахождении частных решений уже упрощенных уравнений. Другой важной проблемой является разработка методов численного решения исходных уравнений.

В данной работе развиваются методы асимптотического анализа связанных уравнений модели метаматериала масса-в-массе с использованием программы Вольфрам Математика. Показано, как с ее помощью можно находить решения и визуализировать их. Разработан метод численного решения исходных связанных уравнений с использованием команды NDSolve Вольфрам Математика. Рассмотрена проблема верификации численного решения при помощи частных аналитических решений.

## **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕРМОТОКОВ С УЧЕТОМ МАГНИТНОГО ПОЛЯ**

Г.Г. Лазарева \*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>РУДН, Москва, Россия

\*lazareva-gg@rudn.ru

В докладе представлена новая модель распределения тока в образце вольфрама и испаряемом веществе с учетом магнитного поля при нагреве поверхности электронным пучком. Предложенная математическая модель является инструментом неразрушающих систем диагностики подповерхностных повреждений различных изделий путем анализа реакции на быстрый нагрев. Модель основана на решении уравнений электродинамики и двухфазной задачи Стефана для расчета температуры в области образца в цилиндрической системе координат. Параметры модели взяты из экспериментов на стенде Beam of Electrons for materials Test Applications (BETA), созданного в ИЯФ СО РАН [1].

Получен [2] результат, свидетельствующий о том, что в рассматриваемой модели максимальная амплитуда термотокров на нагреваемой поверхности находится вне области вращаемого расплава. Чтобы ограничить область растекания токов в математическую модель был добавлен учёт влияния магнитного поля на кинетику электронов. В результате проводимость и термоэдс принимают вид тензора. Введен новый безразмерный параметр - отношение времени между столкновениями к периоду обращения по ларморовской орбите. Коэффициенты получены из обобщённого закона Ома для плазмы, полученного из аналитического решения кинетического уравнения Больцмана на распределение электронов в релаксационном приближении с учетом магнитного поля. Использование коэффициентов в новой форме позволит детальнее описать распределение токов в расплаве, так как плотность плазмы быстро падает по радиусу и ток для

области вне радиуса в плазме будет подавлен. Математическая модель дополнена учетом Джоулева нагрева и эффекта Пельтье на поверхности образца, которые определяются из расчета токов [3]. Результаты моделирования требуются для анализа данных, получаемых на экспериментальном стенде.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект No 25-11-00154).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *L. Vyacheslavov, A. Arakcheev, A. Burdakov, I. Kandaurov, A. Kasatov, V. Kurkuchekov, K. Mekler, V. Popov, A. Shoshin, D. Skovorodin, Y. Trunev, and A. Vasilyev* Novel electron beam based test facility for observation of dynamics of tungsten erosion under intense ELM-like heat loads // AIP Conference Proceedings 1771, 060004 (2016).
2. *G. G. Lazareva, V. A. Popov, V. A. Okishev, A. V. Burdakov* Mathematical model of thermocurrents based on calculation of electrical resistance and thermopower as an integral over electron energy // Dokl. Math., 109:3, 238–245 (2024).
3. *G. G. Lazareva, V. A. Popov* Effect of Joule heating on the result of pulsed heating of the divertor material of a thermonuclear reactor // Lobachevskii Journal of Mathematics (2025).

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛЕНОЧНОЙ КОНДЕНСАЦИИ ПАРА НА РЕБРАХ И В КАНАЛАХ

И.В. Марчук\*<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

<sup>2</sup>Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск, Россия

\*igmarchuk@gmail.com

Процесс пленочной конденсации пара широко применяется в тепло и массообменных аппаратах, таких как тепловые трубы, термосифоны, бытовые и промышленные холодильники, климатические системы, силовые установки атомных и тепловых электростанций. Эффективным методом интенсификации конденсации является использование оребренных поверхностей, а также мини и микро-каналов, когда под действием сил поверхностного натяжения локально уменьшается толщина пленки конденсата.

Разработана трехмерная нестационарная модель пленочной конденсации пара на криволинейной поверхности, учитывающая массовые силы, поверхностное натяжение и трение на поверхности пленки конденсата. Данная модель обобщает известные ранее модели пленочной конденсации пара. Выведено эволюционное уравнение для толщины слоя конденсата. Разработаны численные алгоритмы для решения эволюционного уравнения. Выполнены расчеты конденсации пара в каналах и на ребрах. Найдены оптимальные формы поверхностей, обеспечивающие более высокую интенсивность теплообмена, а также стабильное течение пленки конденсата в условиях микрогравитации.

## КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ОБЛАСТЯХ С ТОНКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

Е.М. Рудой \*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия

\*rem@hydro.nsc.ru

В докладе будет представлен краткий обзор некоторых результатов в области исследования краевых задач теории упругости в областях с тонкими включениями. Будут рассмотрены различные математические модели, описывающие поведение тел с трещинами [1], а также армированных различными включениями (балками, стержнями и др. [2, 3, 4, 5]). Будут обсуждаться вопросы разрешимости соответствующих краевых и

вариационных задач, асимптотические свойства их решений, построение численных алгоритмов, а также приложение к задачам механики разрушения, механики композитов и оптимального управления формой области.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Khludnev A., Leugering G. *On elastic bodies with thin rigid inclusions and cracks*. Math. Methods Appl. Sci. 2010. V. 33. P. 1955–1967.
- [2] Popova T. S. *Numerical solution of the equilibrium problem for a two-dimensional elastic body with a thin semirigid inclusion*. Mathematical Notes of NEFU. 2021. V. 28. P. 51–66.
- [3] Lazarev N., Semenova G., Efimova E. *Equilibrium problem for an inhomogeneous two-dimensional elastic body with two interacting thin rigid inclusions*. Journal of Computational and Applied Mathematics. 2024. V. 4388. 115539.
- [4] Furtsev A., Itou H., Rudoy E. *Modeling of bonded elastic structures by a variational method: Theoretical analysis and numerical simulation*. International Journal of Solids and Structures. 2020. V. 182–183. P. 100–110.
- [5] Kazarinov N., Rudoy E., Slesarenko V., Shcherbakov V. *Mathematical and Numerical Simulation of Equilibrium of an Elastic Body Reinforced by a Thin Elastic Inclusion*. Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2018. V. 58. P. 761–774.

### ТЕСТ ПЕНЛЕВЕ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ВРИЗА-БЮРГЕРСА С НЕЛИНЕЙНЫМ ИСТОЧНИКОМ

Н.А. Кудряшов \*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, Россия  
\*nakudr@gmail.com

Задача Коши для уравнения не решается с помощью обратного преобразования рассеяния в общем случае. Поэтому уравнение рассматривается с учетом переменных бегущей волны. Для исследования интегрируемости уравнения применяется тест Пенлеве к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению. Показано, что существуют общие решения нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения, выраженные через эллиптическую функцию Вейерштрасса и через трансценденты Пенлеве первого уравнения Пенлеве при некоторых ограничениях на параметры уравнения. Специальные методы используются для построения аналитических решений с одной и двумя произвольными постоянными. Получены точные решения с двумя произвольными постоянными, выраженными через эллиптическую функцию Вейерштрасса. Точные решения с одной произвольной постоянной уравнения Кортевега-де Вриза-Бюргерса с нелинейным источником находятся с использованием метода логистических функций. Показано, что семейство рассматриваемых уравнений, для которых найдены точные решения, существенно расширяется при использовании специальных методов.

### OCEANIC VORTEX PULSARS

P. Berloff \*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Imperial College, London SW7 2AZ, United Kingdom  
\*p.berloff@imperial.ac.uk

Theoretical studies of coherent isolated vortices have a half-century history and in many ways have become classics of geophysical fluid dynamics. We will present the theoretical and modelling results about discovery of a new class of stable and ever-living coherent vortices on stratified background shears. These features, referred to as **vortex pulsars**, are fundamentally non-isolated, and also asymmetric and nonstationary. Two distinctly different families of solutions — “strong” and “weak” — will be discussed.

## ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ МЕТОДА ФИКТИВНЫХ ОБЛАСТЕЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА

Н.М. Темирбеков \*<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Казахский национальный университет имени Аль-Фараби, Алматы, Казахстан

<sup>2</sup>Национальная инженерная академия РК, Алматы, Казахстан

\*ntemirbekov314@gmail.com

Одной из ключевых особенностей уравнений Навье–Стокса для вязкой несжимаемой жидкости является отсутствие явных граничных условий на давление. Давление в этой системе выступает в качестве функции Лагранжа, обеспечивающей выполнение условия неразрывности потока и определяется лишь в совокупности с уравнением движения. В связи с этим, при численной реализации задач гидродинамики возникает вопрос: как корректно моделировать поведение давления на границах области. Особенно остро этот вопрос стоит при использовании метода фиктивных областей (МФО), который предполагает замену сложной геометрии физической области на более простую расширенную область.

Метод фиктивных областей расширяет исходную область до области с простой геометрией таким образом, что исходная задача продолжается на вспомогательную область с дополнительными коэффициентами зависящими от малого параметра. Это приводит к задаче в расширенной области при выполнении условий сопряжения на исходной границе.

В данной работе МФО применяется как метод моделирования краевых условий для давления или полного напора. На границе вспомогательной области ставятся граничные условия Дирихле для давления и нулевые граничные условия для касательной составляющей скорости. Такая нестандартная постановка граничных условия для систем уравнений Навье–Стокса вязкой несжимаемой жидкости является корректной. Эти граничные условия позволяют численно решать уравнение Пуассона для давления с граничными условиями Дирихле. Внутренние итерации для определения давления хорошо сходятся. Следующей проблемой является удовлетворения граничных условия для компонент скоростей на исходной физической границе. Для решения этой сложности можно использовать метод сопряженных уравнений, которая дает возможность последовательными приближениями уточнять граничные условия. Для получения численного решения с равномерной точностью используется многосеточный алгоритм.

Для иллюстраций возможностей предложенного варианта МФО были проведены численные расчеты тестовых задач. В качестве тестовой задачи были решены задача течения вязкой несжимаемой жидкости в криволинейном канале и задача течения в канале с движущейся верхней крышкой. Численные расчеты проводились в широком диапазоне входных параметров и на расчетных сетках большой размерности.

## УСТОЙЧИВОСТЬ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ С ДВУ-ЧЛЕННЫМИ ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПО ВРЕМЕНИ

Б.Х. Хужаёров \*<sup>1,2</sup> Ф.Б. Холлиев<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Самаркандский государственный университет им. Шарофа Рашидова, Самарканд,  
Узбекистан

<sup>2</sup>Институт математики им. В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан,  
Ташкент, Узбекистан

\*b.khuzhayorov@mail.ru

Рассматривается уравнение диффузии с дву-членными производными дробного порядка по времени. Для численного решения этого уравнения составлены различные конечно-разностные схемы с аппроксимацией дробных производных по определению Капуто и Грюнвальда-Летникова, а диффузионного члена – сигма-взвешенными разностными производными второго порядка. Используя метод Фон Неймана исследована устойчивость разностных схем. Доказаны теоремы об их устойчивости. Показано, что разностные схемы являются условно устойчивыми, выведены условия устойчивости. Численно оценены размеры области устойчивости по временному шагу. Для случаев использования производной Капуто и Летникова-Грюнвальда получены различные, но близкие условия устойчивости. Это объясняется различными правилами аппроксимации производной Грюнвальда-Летникова. Отдельно исследован случай строгой положительности отношений амплитуд Фурье гармоник. Показано, что это условие сужает область устойчивости конечно-разностных схем.

## **ЗАДАЧА ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА В СОСТАВЕ РАЗГОННОГО БЛОКА НА ЭТАПЕ ВЫВЕДЕНИЯ**

Н.И. Сидняев\*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана, Москва,  
Россия

\*sidnyaev@yandex.ru

Решение задачи о движении космического аппарата (КА) в составе разгонного блока (РБ) является одной из важнейших проблем, на которых базируется проектирование. Движение должно быть организовано рационально, с учетом ряда ограничивающих факторов и условий. Главной функциональной единицей или средством выведения КА с опорной орбиты на целевую орбиту является разгонный блок (РБ). Для выполнения этого РБ должен иметь возможность выполнять несколько маневров, связанных с изменением скорости полета, для чего в каждом случае предполагается включение маршевого двигателя. Также, любой РБ должен иметь дополнительную двигательную установку, обеспечивающую ориентацию и стабилизацию движения РБ с КА и создание условий для запуска маршевого двигателя. Управление работой двигателей может осуществляться от системы управления КА или от автономной системы управления самого РБ.

Отклонения фактических параметров траектории РБ от расчетных являются следствием возмущений, действующих на активном и пассивном участках траектории (отклонения от номинала внешних условий полета, ошибки приборов системы управления, разброс конструктивных параметров ракеты и двигательной установки и т.д.). Решение баллистических задач проводится путем математического моделирования тех реальных процессов, которые происходят при полете РБ. Для такого моделирования необходимо иметь математическое описание РБ, внешних условий, в которых протекает полет и взаимодействия РБ с внешним пространством. Оценка точностных характеристик разгонного блока как научная дисциплина является одним из разделов динамики полета ракет и включает в себя совокупность наук, таких как теоретическая механика, механика полета, теория гироскопов и инерциальных систем, теория колебаний, теория вероятностей и математическая статистика и др.

В настоящей работе изучено движение космического аппарата в составе разгонного блока на этапе выведения. Разработана программа для совершения маневра изменения орбиты. На основе полученных данных из краевой задачи исследована оценки точности выведения разгонного блока, путем варьирования параметров.

# СТРАТЕГИИ ЧИСЛЕННОГО РАСЧЕТА ЭФФЕКТИВНОСТИ РАБОТЫ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЕНСОРОВ И АКТУАТОРОВ

А.В. Наседкин \*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

\*avnasedkin@sfedu.ru

Пьезоэлектрические материалы находят многочисленные применения благодаря практически линейным зависимостям между механическими и электрическими полями с высокими коэффициентами связанности. Для конкретных применений необходимо оптимизировать конструкции пьезопреобразователя и подобрать тип пьезоэлектрического материала или композита. Эти устройства могут выступать как сенсоры (например, генераторы «зеленой энергии») или актуаторы (например, ультразвуковые излучатели), которые работают в нерезонансных режимах приема или в резонансных режимах излучения.

Для моделирования эффективности работы таких устройств часто необходим комплекс взаимосвязанных расчетов в статическом, модальном, гармоническом и нестационарном режимах анализа. Во многих ситуациях требуется учесть внешнюю акустическую или жидкую среду и внешние электрические цепи. При использовании комбинированных пьезокерамических материалов предварительно нужно определить эффективные модули из решения специальных задач гомогенизации, включающих расчеты неоднородности поля поляризации пьезокерамики и обусловленной этим неоднородности ее материальных свойств. В работе приводятся и обсуждаются конечно-элементные стратегии, ориентированные на использование программных комплексов ANSYS APDL и ACELAN, причем во втором пакете реализованы расчеты с матрицами седловой структуры. Приведен ряд примеров расчетов пьезоэлектрических композитов и устройств.

Работа выполнена в Южном федеральном университете при поддержке гранта РФФ № 22-11-00302-П, <https://rscf.ru/project/22-11-00302/>.

## ON CALCULATION OF SPIN GROUP ELEMENTS

Dmitry Shirokov<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>HSE University, Moscow, Russia

<sup>2</sup>Institute for Information Transmission Problems of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

\*dm.shirokov@gmail.com

We present a method for calculation of spin groups elements for known pseudo-orthogonal group elements with respect to the corresponding two-sheeted coverings. We present our results using the Clifford algebra formalism in the case of arbitrary dimension and signature, and then in some special cases explicitly using matrices, quaternions, and split-quaternions. The different formalisms are convenient for different possible applications in physics, engineering, and computer science.

The work is supported by the project “Mirror Laboratories” of HSE University and North-Eastern Federal University “Quaternions, geometric algebras and applications”.

## СТРУКТУРЫ РАЗРЫВОВ В МИКРОПОЛЯРНОЙ МАГНИТОУПРУГОЙ СРЕДЕ

И.Б. Бахолдин\*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия

\*ibbakh@yandex.ru

Анализируется модель на основе теории Коссера с дополнительными параметрами, связанными с внутренними вращениями. Она обладает дисперсионными свойствами и конечной скоростью распространения волн, что предполагает существование как бездиссипативных структур, так и опрокидывание волн, требующее включения диссипации. Рассматриваются структуры разрывов, переходы между однородными или периодическими состояниями. Обнаружены структуры солитонного типа, структуры разрывов с излучением и переходы между однородными состояниями. Структуры с излучением содержат внутренний разрыв производных, а периодические состояния содержат последовательность слабых разрывов (разрывов производной второго порядка). Структуры переходов между однородными состояниями содержат внутренний слабый разрыв. Решается численно задача о распаде произвольного разрыва и исследуются уравнения бегущих волн. Анализируются условия эволюционности. Модель обобщается на случай пластичности. Рассматриваются варианты с гистерезисом и остаточной деформацией и без этих эффектов. Используется конечноразностная схема с центральными разностями и аппроксимацией временных производных методом Рунге–Кутты четвертого порядка. Схема обладает низкой схемной диссипацией, но в случае разрывных решений с течением времени дает дисперсионно-диссипативные схемные структуры, достигается сходимость.

## Секция «Математические проблемы механики»

### ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО РЕЖИМА ОКИСЛИТЕЛЬНОЙ РЕГЕНЕРАЦИИ КАТАЛИЗАТОРА ГИДРООЧИСТКИ

И.М. Губайдуллин \*<sup>1</sup> О.С. Язовцева<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ИНК УФИЦ РАН, УГНТУ, Уфа, Россия

<sup>2</sup>Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Москва,  
Россия

\*irekmars@mail.ru

В докладе представлены результаты исследования динамического режима окислительной регенерации катализатора гидроочистки при различных технологических условиях. Динамический режим химического процесса заключается в подаче реакционной смеси с переменными характеристиками. В основе математической модели исследуемого каталитического процесса лежит гиперболическая модель нестационарного процесса в слое катализатора, описывающая массоперенос и химические превращения в порах зерна, конвективные потоки в слое катализатора.

Вычислительный алгоритм основан на методе конечных объемов. Для уравнений диффузии-конвекции-реакции записана трехслойная по времени явная разностная схема. Расчет вынужденного конвективного переноса ведется с использованием метода характеристик. Уравнения тепломассопереноса по длине слоя катализатора аппроксимированы неявно с целью сохранения устойчивости алгоритма при резких перепадах температуры в химическом реакторе.

Расчетные результаты подтвердили гипотезу о снижении температурных забросов в реакторе при реализации динамического режима. Получен вывод об эффективности динамического режима окислительной регенерации при низких концентрациях кислорода в реакционной смеси.

Работа выполнена при финансовой поддержке Института нефтехимии и катализа Российской академии наук (тема N FMRS-2025-0031).

### ОСОБЕННОСТИ ТРАНСЗВУКОВОГО ОБТЕКАНИЯ ПРОФИЛЯ КРЫЛА С ИНТЕРЦЕПТОРОМ

А.Г. Кузьмин \*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

\*a.kuzmin@spbu.ru

Зависимость аэродинамических сил, действующих на крыло самолета в крейсерском полете, от положения элеронов и интерцепторов изучалась в ряде работ. Вместе с тем структура течения и его высокая чувствительность к малым возмущениям в трансзвуковых условиях не были исследованы достаточно хорошо.

В данной работе проведено исследование трансзвукового обтекания воздуха профиля NASA SC(2)-0710 с интерцептором при разных углах отклонения интерцептора от нейтрального положения. Численные решения осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса получены с помощью программы, основанной на методе конечных объемов. Выявлена высокая чувствительность картины обтекания и подъемной силы к углу поворота интерцептора, а также к изменениям числа Маха набегающего потока  $M_\infty$  и угла атаки  $\alpha$ . Установлены диапазоны  $M_\infty$  и  $\alpha$ , в которых наблюдается резкое

изменение положения ударных волн, вызывающее реструктуризацию течения и скачки подъемной силы. Полученные результаты показывают существование неблагоприятных углов поворота интерцептора, зависящих от числа Маха  $M_\infty$  и угла атаки  $\alpha$ , при которых слабая турбулентность атмосферы может приводить к значительным скачкам подъемной силы и вибрации самолета.

## **МЕТОДЫ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ЧАСТИЦ ИЛИ ИЗЛУЧЕНИЯ**

Е.Н. Аристова\*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша, Москва, Россия

\*aristovaen@mail.ru

Перенос излучения или частиц описывается интегро-дифференциальным уравнением переноса, в котором в правой части уравнения стоит интегральный член рассеяния (и, возможно, деления). Наличие интегрального члена подразумевает итерационный процесс, который при некоторых условиях сходится чрезвычайно медленно. Одним из способов ускорения итераций является использование HOLO алгоритмов, в которых помимо полноразмерного уравнения переноса (HO – high order) решаются кинетические уравнения более низкого порядка (LO – low order). HOLO алгоритмы делятся на два больших класса: аддитивные и мультипликативные. Для сохранения эффективности ускорения аддитивных алгоритмов при больших оптических толщинах должны использоваться кинетически-согласованные разностные схемы в LO части. Поэтому к классическому противоречию схем высокого порядка для уравнения переноса, а именно: порядок аппроксимации vs монотонность, добавляется второе противоречие: явный учет экспоненциальной зависимости решения от оптической толщины vs возможность построения кинетически-согласованных схем для уравнений низкой размерности. В докладе будет идти речь о построении схем высокого порядка для уравнения переноса излучения/частиц на регулярных и тетраэдральных сетках.

## **ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ДОЗВУКОВЫХ ГАЗОПЫЛЕВЫХ ПОТОКОВ В ПРИСУТСТВИИ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ**

Е.Е. Пескова \*<sup>1</sup> В.Н. Снытников<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Национальный исследовательский Мордовский государственный университет,

Саранск, Россия

<sup>2</sup>Институт катализа имени Г.К. Борескова СО РАН, Новосибирск, Россия

\*e.e.peskova@math.mrsu.ru

Современные задачи химической промышленности, связанные с малотоннажной переработкой метана и других легких углеводородов, возродили интерес к лазерной термомеханике. Появляется необходимость создания математических моделей и параллельных вычислительных алгоритмов для исследования двухфазных химически активных течений газа и каталитических наночастиц в присутствии лазерного излучения с целью определения наилучших условий переработки метана и других легких углеводородов в этилен, ароматические соединения и водород.

В работе приводится математическая модель, строится численная реализация на основе метода расщепления по физическим процессам, который позволяет одновременно учитывать разномасштабные физико-химические процессы. Проведено исследование осесимметричных течений двухфазной химически активной среды с лазерным излучением, определено влияние ряда физических параметров на выходы продуктов конверсии метана.

## ДИНАМИКА ЛЕГКИХ РАДИКАЛОВ В ГАЗОПЫЛЕВОЙ СРЕДЕ С КАТАЛИТИЧЕСКОЙ КОНВЕРСИЕЙ УГЛЕВОДОРОДОВ

В.Н. Снытников \*<sup>1</sup> Е.Е. Пескова<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт катализа имени Г.К. Борескова СО РАН, Новосибирск, Россия

<sup>2</sup>Национальный исследовательский Мордовский государственный университет,  
Саранск, Россия

\*snyt@catalysis.ru

Изучение конверсии метана и других легких алканов в гетерогенно-гомогенных процессах с участием каталитически активных поверхностей сталкивается с необходимостью рассчитывать пространственные масштабы влияния этих поверхностей на зарождение и распространение радикалов. Расчет этих масштабов нами проводится с учетом сложных кинетических механизмов радикальных цепных реакций для углеводородов, газодинамики двухфазной многокомпонентной среды с каталитически активными наночастицами и изменением внутренней энергии в эндотермическом химическом процессе. Эти расчеты осуществляются с помощью 2D параллельного кода с решением нестационарных уравнений. Решения модельной нелинейной задачи сравниваются с известными аналитическими результатами для одномерного случая. Расчеты показывают, что физические представления из части работ об области пространства, занятой радикалами, основанные на оценках диффузии и гибели радикалов, требуют существенного уточнения. Подобные уточнения могут значительно повлиять на проектирование соответствующих технологических процессов.

## ON ONE SOLUTION OF THE PROBLEM OF OSCILLATIONS OF MECHANICAL SYSTEMS WITH MOVING BOUNDARIES

K.V. Litvinova<sup>1</sup> V.L. Litvinov \*<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

<sup>2</sup>Samara State Technical University, Samara, Russia

\*vladlitvinov@rambler.ru

The problem of oscillations of bodies with moving boundaries, formulated as a differential equation with boundary and initial conditions, is a non-classical generalization of a hyperbolic problem. To facilitate the construction of a solution to this problem and to justify the choice of the solution type, equivalent integro-differential equations with symmetric and non-stationary kernels and non-stationary integration limits are constructed. The advantages of the integro-differential equation method are revealed when moving to more complex dynamic systems gathered concentrated masses oscillating under the action of moving loads.

The method is extended to a wider class of model boundary value problems that take into account bending rigidity, resistance of the external environment and the rigidity of the base of the oscillating object. The solution is given in dimensionless variables with an accuracy of up to the values of the second order of smallness of relatively small parameters characterizing the velocity of the boundary. An approximate solution is found for the problem of transverse vibrations of a viscoelastic beam with bending rigidity, taking into account the action of damping forces.

## ВЛИЯНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ФРОНТА ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА В ГЕОТЕРМАЛЬНОМ РЕЗЕРВУАРЕ

К.Р. Житников \*<sup>1</sup> Г.Г. Цыпкин<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

\*k.zhitnik01@gmail.com

Рассматривается одномерная задача инъекции воды в высокотемпературные породы. Исследуется устойчивость фронта кипения воды, отделяющего водонасыщенную область от области, насыщенной перегретым паром. Предполагается, что амплитуда возмущения давления воды явно зависит от времени. Получено дисперсионное уравнение, исследованное численно и аналитически. Найдено, что критерий устойчивости зависит от времени и асимптотически приближается к решению для бесконечной водонасыщенной области. Показано, что движущийся изначально неустойчивый фронт с течением времени может стабилизироваться, а потеря устойчивости с ростом времени невозможна. Расчеты показывают, что для высокопроницаемых пород результаты асимптотического решения могут быть применены с высокой точностью. Для низкопроницаемых пород время, необходимое для выхода на асимптотический режим, может быть большим. Установлено, что размер пальцев, образующихся при неустойчивости, уменьшается с ростом проницаемости и градиента давления и слабо зависит от времени.

Работы выполнены при поддержке Российского Научного Фонда, проект 24-11-00222.

## **УСТОЙЧИВОСТЬ НЕКЛАССИЧЕСКИХ РАЗРЫВОВ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА-БЮРГЕРСА С ПЕРЕМЕННЫМ ПАРАМЕТРОМ ДИССИПАЦИИ**

Г.В. Коломийцев \*<sup>1</sup> В.А. Шаргатов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Национальный Исследовательский Ядерный Университет «МИФИ» (Московский Инженерно-Физический Институт), Москва, Россия

\*gvkolomiitsev@mephi.ru

Распространение волн в сплошных средах может приводить к образованию узких высокоградиентных зон. Характер изменения параметров среды в них описывается в моделях, учитывающих наличие у среды диссипативных и диспергирующих свойств. Если функция потока физической величины имеет точки перегиба, то возможно возникновение разрывов, нарушающих классические условия эволюционности. Примером уравнения, иллюстрирующего такие свойства сред, является обобщенное уравнение Кортевега-де Фриза-Бюргерса. Для построения решения задачи Римана в таких задачах необходимо знание структуры множества решений в виде бегущих волн и исследование их устойчивости.

Такое исследование проведено для случая, когда параметр диссипации зависит от решения, а функция потока имеет две точки перегиба. Показано, что если среди таких решений существуют особые разрывы, то ровно один из них является монотонной функцией координат. Устойчивость бегущих волн исследована как в линейном приближении методом функции Эванса, так и численным решением уравнения. Проведена классификация неустойчивых решений и проверена гипотеза об устойчивости монотонных разрывов. Сформулирован общий подход к решению задачи Римана для такого уравнения.

## **ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ТЕМПЕРАТУРНОГО РЕЖИМА ВЕЧНОМЕРЗЛОГО ГРУНТА В ОКРЕСТНОСТИ МАГИСТРАЛЬНОГО ГАЗОПРОВОДА ПРИ ИЗМЕНЕНИИ КЛИМАТА**

А.А. Федотов \*<sup>1</sup> П.В. Храпов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

\*le-tail@list.ru

Исследована начально-краевая задача для нестационарного двумерного уравнения теплопроводности в ограниченной области, моделирующая нестационарное распределение температуры вечномерзлого грунта в окрестности магистрального газопровода с учетом потепления климата. Параметры математической модели подобраны в соответствии с экспериментальными данными по транспортировке газа в районах распространения многолетнемерзлых грунтов. Задача решена численно методом конечных элементов. Моделирование проводится в течение 30 лет с момента начала эксплуатации газовой трубы. Расчеты проводятся до практического установления периодического температурного режима грунта вокруг газопровода.

Рассмотрены два сценария Representative Concentration Pathway (RCP) глобального потепления: умеренный RCP2.6 и более негативный RCP8.5. Показано, что в окрестности трубы происходят значительные изменения в температурном режиме грунта при реализации обоих сценариев потепления. Тем не менее, расчеты демонстрируют сохранение вечной мерзлоты даже при негативном сценарии потепления климата.

## **РАЗРАБОТКА СОВРЕМЕННЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ И ОБОБЩЕННЫХ МОДЕЛЕЙ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ХАРАКТЕРИСТИК КОМПОЗИТОВ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ФАКТОРОВ В РАМКАХ ВАРИАЦИОННЫХ ПОСТАНОВОК**

Е.Л. Гусев \*<sup>1,2</sup> В.Н. Бакулин<sup>3</sup>

<sup>1</sup>ИПНГ ФИЦ «Якутский научный центр Сибирского Отделения РАН», Якутск, Россия

<sup>2</sup>Северо-Восточный федеральный университет, Якутск, Россия

<sup>3</sup>Институт прикладной механики РАН, Москва, Россия

\*elgusev@mail.ru

В последние десятилетия полимерные композиционные материалы (ПКМ) становятся неотъемлемой частью современной техники в таких областях, определяющих научно-технический прогресс, как авиа- и космическая техника, судостроение, нефтяная и газовая промышленность и др. В последние годы значительную актуальность приобретают вопросы повышения эффективности эксплуатации конструкций из композитов при воздействии экстремальных факторов, характерных для климатических условий Арктической и Субарктической зоны. На современном уровне развития научно-технического прогресса, тенденций развития современной науки о материалах возникает необходимость использования и развития новейших методов и технологий для высокоточного прогнозирования свойств материалов. Решение данной проблемы представляет большую важность для решения вопросов создания новых перспективных композиционных материалов с повышенной долговечностью, функционирующих в экстремальных условиях. На основе новых вариационных методов были проведены исследования по расширению возможностей высокоточного прогнозирования срока службы новых полимерных композиционных материалов в экстремальных условиях. В основу разработки обобщенных моделей долговечности композитов в экстремальных условиях положены основные положения современной молекулярно-кинетической теории (МКТ), учитывающей возможности химических превращений в композитах как на межмолекулярном, так и на внутримолекулярном уровне. На основе современных положений МКТ исследован вопрос о согласовании определяющих параметров математических моделей, учитывающих результаты экспериментальных измерений на макроуровне, с соответствующими определяющими параметрами физических моделей, описывающих молекулярные взаимодействия на микроуровне. В рамках современных вариационных методов разработаны математические методы и обобщенные модели долговечности, учитывающие

влияние нескольких экстремальных факторов на материал. Проведенные вычислительные эксперименты показали высокую эффективность разработанных математических методов и обобщенных моделей долговечности для решения задач высокоточного прогнозирования определяющих характеристик композитов при воздействии экстремальных факторов внешней среды.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ (рег. No 122011100162-9) с использованием оборудования Центра коллективного пользования ФИЦ ЯНЦ СО РАН и в рамках государственного задания ИПРИМ РАН (номер гос. регистрации темы 1023032300192-8-2.3.2

## **О МОДЕЛИРОВАНИИ ТОНКИХ ОТСЛОИВШИХСЯ ВКЛЮЧЕНИЙ С ЛОКАЛЬНЫМ ПОВРЕЖДЕНИЕМ В ДВУМЕРНОМ УПРУГОМ ТЕЛЕ**

Т.С. Попова \*<sup>1</sup> А.А. Ефремов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова, Якутск, Россия  
\*ptsokt@mail.ru

В работе рассматриваются задачи о равновесии двумерных упругих тел, содержащих отслоившиеся тонкие включения с локальным дефектом. В формулировке задач использован положительный параметр, характеризующий степень точечного повреждения материала включения. Исследованы случаи тонкого упругого включения, моделируемого в рамках теории балки Тимошенко, а также тонкое жесткое включение, характеризующее специальными условиями на структуру функций перемещений. Отслоение тонкого включения подразумевает наличие трещины, при этом на ее берегах заданы неклассические краевые условия типа неравенств. Задачи формулируются в виде вариационных неравенств, соответствующих минимизации функционала энергии на выпуклом множестве.

Доказана разрешимость каждой из задач. Обоснован предельный переход по параметру повреждаемости и показано, что предельные случаи соответствуют случаям полного излома либо отсутствию повреждения в точке. Выведена система уравнений, граничных условий и условий сопряжения в точке повреждения. Доказана эквивалентность полученных вариационной и дифференциальной постановок. Разработан алгоритм вычисления приближенного решения и приведены примеры численной реализации.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-21-20128, <https://rscf.ru/project/25-21-20128/>

## **ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ УГЛОМ НАКЛОНА ПРЕПЯТСТВИЯ В КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПЛАСТИНЫ ТИМОШЕНКО**

Н.П. Лазарев<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова, Якутск, Россия  
\*nyurgunlazarev@inbox.ru

Предложена новая математическая модель, описывающая контакт пластины Тимошенко с наклонным препятствием. Предполагается, что в начальном состоянии заданная часть границы нижней поверхности пластины касается недеформируемого препятствия. Кроме того, предполагается, что поверхность препятствия составлена из прямолинейных отрезков — образующих. При этом каждая образующая расположена под заданным углом к плоскости пластины, соответствующей ее лицевой поверхности. Налагается граничное условие типа Синьорини в виде неравенства, зависящего от угла наклона препятствия. Соответствующая вариационная задача о равновесии пластины формулируется в виде минимизации функционала энергии над выпуклым множеством.

Установлено, что задача имеет единственное решение. Предполагая, что углы наклона могут изменяться относительно положительного параметра  $\delta$ , рассматривается семейство задач равновесия. Параметр  $\delta$  принадлежит заданному замкнутому интервалу и определяет изменение углов между образующими и лицевой поверхностью пластины. Принимая указанный параметр в качестве управления, формулируется задача оптимального управления для функционала стоимости, характеризующего отклонение решения от заданных обобщенных перемещений. Доказывается существование решения задачи оптимального управления. Также устанавливается непрерывная зависимость решений от параметра  $\delta$  в подходящем пространстве Соболева.

Результаты получены при поддержке гранта Российского научного фонда № 23-71-30013 (<https://rscf.ru/en/project/23-71-30013/>)

## **ВЛИЯНИЕ ТЕРМИЧЕСКИ СТРАТИФИЦИРОВАННОГО ЭНЕРГОВКЛАДА НА ПАРАМЕТРЫ ВЫСОКОСКОРОСТНЫХ ПОТОКОВ И ГЕНЕРАЦИЮ ШУМА**

О.В. Кравченко \*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

\*olekravchenko@mail.ru

Управление полетом сверхзвуковых гражданских самолетов является важной задачей в области аэрокосмической инженерии. Актуальными являются активные методы управления потоком, использующие в качестве инструмента управления локальное вложение энергии (энерговклад) в различные точки потока.

В работе рассматриваются вопросы управления динамическими характеристиками высокоскоростного обтекания при помощи термически стратифицированных источников энергии. Выявлен много вихревой механизм воздействия стратифицированного источника на головную ударную волну, обусловленный проявлением неустойчивости Рихтмайера–Мешкова. Разработан полу–автоматический подход к цифровой обработке экспериментальных изображений. Рассмотрена задача шумового воздействия на поверхность земли (Sonic Boom problem). Показано, что на некоторых режимах течения применение термически стратифицированных источников энергии не вызывает увеличение шума на поверхности, что является важным аспектом в решении задач, связанных с давлением шума.

Таким образом, показано, что применение термически стратифицированных источников энергии является перспективным методом для разработки систем управления высокоскоростным потоком/полетом.

## **ВЫЧИСЛЕНИЕ ФИНАЛЬНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДЛЯ ПРОЦЕССОВ РОЖДЕНИЯ И ГИБЕЛИ С ПОЛУПРОЗРАЧНЫМИ ЭКРАНАМИ**

А.А. Мاستихина<sup>1</sup> А.В. Мастихин \*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

\*mastikhin@bmstu.ru

Рассматривается следующее обобщение классического марковского процесса рождения и гибели с двумя поглощающими экранами и дискретным временем, известный также как задача о зрении игрока. Для каждого состояния известны вероятности за единицу времени перейти в предыдущее состояние и в последующее, а также вероятность остаться на месте, то есть в каждое состояние добавляется полупрозрачный экран. Если же ещё и в одно из поглощающих состояний добавить упругий экран, то мы получим единичную вероятность перехода в оставшееся поглощающее состояние, и ситуация становится тривиальной.

Поскольку ставится задача о финальных вероятностях, то после перехода к пределу мы приходим к процессу с дискретным временем. Это даёт возможность применить методы дискретной математики. А именно, процесс представляется в виде ориентированного графа, размеченного по вероятностям переходов между состояниями. Для данного недетерминированного автомата находятся регулярные выражения, определяющие запись формул вероятностей переходов, в том числе в поглощающие состояния.

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ ВНЕШНЕГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ПРОВОДЯЩУЮ СРЕДУ**

Н.М. Гордеева<sup>1</sup> Ю.Б. Станкевич\*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

\*juliastan@bmstu.ru

Рассматривается отклик электронной плазмы на воздействие внешнего электромагнитного поля. В рамках кинетического подхода для описания поведения заряженных частиц используется кинетическое уравнение Больцмана, дополненное системой уравнений Максвелла для самосогласованного поля. Интеграл столкновений в кинетическом уравнении взят в форме Бхатнагара — Гросса — Крука. В предположении, что амплитуда внешнего поля достаточно мала, рассматриваемая система интегро–дифференциальных уравнений решена в аналитическом виде методом малых возмущений.

Для поиска решения использовался метод преобразования Фурье обобщенных функций комплексного аргумента. Для решения краевых задач в разной постановке была применена теория решений сингулярных интегральных уравнений методом сведения их к задаче Римана. В работе представлены результаты моделирования поведения плазмы, для которой в невозмущенном виде справедливо распределение Ферми — Дирака или Максвелла. Рассматривается поведение плазмы в слое и полупространстве, а также разные подходы к моделированию отклика плазмы на внешнее поле в слое. Исследована зависимость решения от частоты и амплитуды внешнего поля, а также от характеристик среды — плазменной частоты и частоты столкновений.

## **ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ С ПРИМЕНЕНИЕМ ОДНОЙ АДАПТИВНОЙ ИСКУССТВЕННОЙ ВЯЗКОСТИ ДЛЯ ПОЛНОСТЬЮ КОНСЕРВАТИВНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ**

М.Е. Ладонкина<sup>1,2</sup> Ю.А. Повещенко<sup>1,2</sup> Х. Чжан \*<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия

<sup>2</sup>Московский физико-технический институт (НИУ), Долгопрудный, Россия

\*chzhan.h@phystech.edu

Уравнения газовой динамики представляют собой выражения основных законов сохранения (массы, импульса и энергии) в сплошной среде. В исследовании и практике полностью консервативные разностные схемы (ПКРС) [1, 2] с адаптивной искусственной вязкостью [3] показывают эффективность и точность для решения задач газовой динамики.

Рассмотрим двухслойную по времени полностью консервативную разностную схе-

му пространственно-одномерного течения сжимаемого газа в переменных Эйлера:

$$m_t = -vDIN_D\mu\tilde{D}, \quad (1)$$

$$(mu)_t = -vGRAD_\sigma\pi\tilde{~} - vDIT_D(\mu\tilde{D} \cdot u\tilde{D}), \quad (2)$$

$$(m\varepsilon)_t = -\frac{1}{2} \sum_{\omega(\Omega)} (\pi\tilde{~}VDIV_\sigma u\tilde{~})_\Omega - vDIN_D\mu\tilde{E}_D, \quad (3)$$

$$(m\frac{u^2}{2})_t = -v(u\tilde{~}, GRAD_\sigma\pi\tilde{~}) - vDIN_D(\mu\tilde{D}\frac{u\tilde{D}^2}{2}), \quad (4)$$

где

$$\mu = \rho u, \mu_E = \varepsilon\mu = Eu, E = \rho\varepsilon, \rho\tilde{~} = \rho^{(\psi_\rho)}, \psi_\rho = const,$$

$$M\tilde{D} = \frac{1}{2} \sum_{\omega(\Omega)} (\rho_\omega u_\omega)^{(0.5)}, \mu\tilde{D} = M\tilde{D} - \nu_\rho\tilde{~}GRAND\rho\tilde{~},$$

$$\pi\tilde{~} = P_\Omega^{(0.5)} - \nu_u\tilde{~}DIV_\sigma(\rho\tilde{~}u^{(\psi_u)}), P_\Omega = \frac{1}{2} \sum_{\omega(\Omega)} P_\omega, \psi_u = const,$$

$$M\tilde{E}_D = \frac{1}{2} \sum_{\omega(\Omega)} (E_\omega u_\omega)^{(0.5)}, \mu\tilde{E}_D = M\tilde{E}_D - \nu_E\tilde{~}GRAND(\rho\tilde{~}\varepsilon^{(\psi_\varepsilon)}), \psi_\varepsilon = const,$$

$\{\nu_\rho\tilde{~}, \nu_u\tilde{~}, \nu_E\tilde{~}\}$  - группа искусственной вязкости.

В работе [4] предложены методы наполнения АИВ для данной ПКРС. Для тестирования предлагаемых методов проводятся расчёты задач Эйфельдта [5] и Сода [6]. Часть результатов расчётов представлена в рис. 1 и рис. 2. Результаты показывают высокую точность. Кроме этого численные значения скорости и термодинамических величин (плотность внутренняя энергия и энтропия) совпадают с аналитическими.

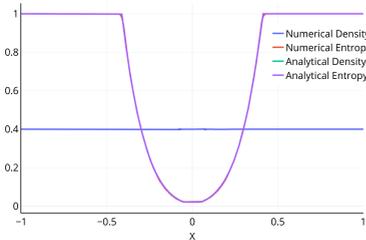


Рис. 1. Профиль плотности и энтропии ( $P/\rho^\gamma$ ,  $\gamma$  - показатель адиабаты) при решении задачи Эйфельдта

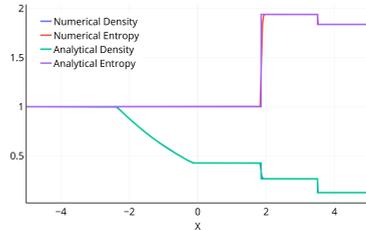


Рис. 2. Профиль плотности и энтропии ( $P/\rho^\gamma$ ,  $\gamma$  - показатель адиабаты) при решении задачи Сода и их аналитическое решение.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Samarskii, A. A., Popov, I. P. (1980). Difference methods for solving problems of gas dynamics. Moscow Izdatel Nauka.
- [2] Yu.P. Popov, A.A. Samarskii, Completely conservative difference schemes, USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, Volume 9, Issue 4, 1969, Pages 296-305, ISSN 0041-5553.
- [3] I.V. Popov, I.V. Fryazinov, Adaptive artificial viscosity method numerical solution of equations of gas dynamics, Moscow, Krasand, 2014 (In Russ).'

- [4] M. E. Ladonkina, Yu. A. Poveschenko, H. Zhang, “Comparative analysis of some iterative processes for realization of fully conservative difference schemes for gas dynamics equations in Euler variables”, Zhurnal SVMO, 26:4 (2024), 404–423 (In Russ).
- [5] B Einfeldt, C.D Munz, P.L Roe, B Sjögreen, On Godunov-type methods near low densities, Journal of Computational Physics, Volume 92, Issue 2, 1991, Pages 273-295, ISSN 0021-9991.
- [6] Gary A Sod, A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws, Journal of Computational Physics, Volume 27, Issue 1, 1978, Pages 1-31, ISSN 0021-9991.

## **ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ С ОСОБЕННОСТЯМИ В ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ**

П.А. Гвоздев \*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва,  
Россия

\*gvozdevpa@student.bmstu.ru

При рассмотрении твердотельной плазмы возникает необходимость нахождения значений интегралов следующего вида:

1. Интегралов типа Коши с экспоненциально убывающей плотностью, рассматриваемых в смысле главного значения, в том числе тех, плотности которых выражаются через распределения Максвелла, Ферми-Дирака, Бозе-Эйнштейна.
2. Интегралов по бесконечному контуру, где подынтегральная функция является распределением с тяжёлыми хвостами, в том числе интегралов типа Коши с такими плотностями.
3. Интегралов, содержащих логарифмическую функцию, трудности вычисления которых связаны с её многозначностью.

Для решения интегралов первого типа применялось преобразование их к интегралам с конечными пределами, что позволяло свести их к функции Доусона или к рядам, содержащим эту функцию. Интегралы второго типа вычислялись посредством разбиения оси интегрирования на интервалы, на каждом из которых использовались соответствующие методы. В большинстве случаев были получены точные аналитические выражения или приближённые формулы с оценкой погрешности.

Для интегрирования функций, содержащих логарифм, был разработан алгоритм, позволяющий устранить ошибки, обусловленные многозначностью функции.

## **ОБ УПРАВЛЕНИИ ТЕМПЕРАТУРНЫМ РЕЖИМОМ В ПРОМЫШЛЕННОЙ ТЕПЛИЦЕ И ЕГО ОПТИМИЗАЦИИ**

И.В. Асташова<sup>1,4</sup> Д.А. Лашин<sup>2</sup> А.В. Филиновский \*<sup>3,1</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия  
<sup>2</sup>НПФ “ФИТО”, Москва, Россия

<sup>3</sup>Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва,  
Россия

<sup>4</sup>Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова, Москва, Россия

\*flnv@yandex.ru

Исследуется задача управления температурным режимом в промышленной теплице, состоящая в том, чтобы поддерживать температуру на заданной высоте в соответствии с заданным графиком. Управление осуществляется за счет изменения температуры пола

теплицы. Контроль управления осуществляется с помощью функционала качества, который выбирается в зависимости от требований "гладкости" управления. Задача состоит в том, чтобы минимизировать отклонение. Исследуются качественные свойства минимизирующей функции, обсуждаются вопросы точной и приближенной управляемости. Получены оценки сверху и снизу минимизирующей функции в терминах используемого функционала качества.

## **РАЗРАБОТКА СЛОЖНЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ ПЛАНОВ ДЛЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО ЭКСПЕРИМЕНТИРОВАНИЯ ВЫСОКОТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ**

Э. Баттулга \*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

\*b.enkhjargald@gmail.com

Представлены композиционные планы с дробными репликами и планы Плакетта – Бермана. Постулируется, что по мере усложнения рассматриваемых областей исследования и проверки гипотез о несимметричных по степеням факторов математических моделей, стало необходимым применение центральных композиционных планов, построенных численными методами и позволяющих более полно учесть априорную информацию о динамических характеристиках исследуемых моделей. На начальной стадии исследования газодинамических параметров при наличии многих переменных и при неизвестной области оптимума на первом этапе обычно решались задачи выделения главных факторов в эксперименте с использованием дробных реплик или планов Хартли, а затем осуществлялось шаговое движение к оптимуму с использованием обобщенного критерия. К настоящему времени с использованием теории планирования эксперимента решено большое количество задач по газовой динамике, имеющих важное научное и практическое значение. На этапе разработки качественного состава различных газодинамических параметров использовались ротатбельные планы, разноуровневые факторные планы, где часто встает проблема учета взаимодействий уровней качественных факторов.

## **ПОСТРОЕНИЕ ВЕЙВЛЕТОВ НА ОСНОВЕ ОДНОГО СЕМЕЙСТВА ГАРМОНИЧЕСКИХ АТОМАРНЫХ ФУНКЦИЙ**

Я.Ю. Коновалов\*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

\*generator-fn-1@mail.ru

Развитие технологий и повсеместное внедрение цифровых технических решений приводит к генерации значительных объемов информации: цифровых изображений, видеозаписей, данных с различных датчиков и т.д. В связи с этим возникает задача разработки эффективных средств обработки и сжатия данных. Одним из подходов к решению данной задачи является применение аппарата вейвлет-анализа.

В данной работе рассматривается обобщение конструкции вейвлетов Мейера, в которой спектр масштабирующей функции строится как квадратный корень из свертки прямоугольного импульса и гармонической атомарной функции  $g_k(x)$ . Численный эксперимент показывает, что наилучшими характеристиками обладают вейвлеты, соответствующие определенным значениям параметра  $k$ . В этом случае функция имеет вид фрактальной конструкции. Эксперименты по применению полученных вейвлетов в задачах сжатия сигналов и изображений демонстрируют их эффективность.

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛЗУЧЕСТИ МАТЕРИАЛОВ С ПАМЯТЬЮ

Д.А. Приказчиков\*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Московский физико-технический институт (НИУ), Долгопрудный, Россия

\*prikazchikov.da@phystech.edu

В работе исследуются математические аспекты моделирования ползучести материалов в рамках линейной теории Вольтерра. Используются интегральные операторы с сингулярными ядрами (например, типа Работнова), учитывающие наследственные свойства аморфных и гетерогенных материалов.

Доказаны теоремы существования, единственности и бесконечной дифференцируемости решений в классическом и сильном смыслах для уравнений с переменными (в том числе разрывными) коэффициентами. В одномерном случае построено общее решение в виде рядов Фурье, позволяющее эффективно анализировать динамику ползучести. Разработаны методы идентификации материальных параметров по кривым ползучести при произвольном нагружении.

Предложен вычислительный алгоритм для решения волнового уравнения с памятью в одно-, двух- и трёхмерной постановках. Исходная задача с абелевым ядром сводится к системе уравнений с дробной производной по времени. Для пространственной дискретизации применяется схема Лакса–Вендроффа, а интегрирование по предыстории нагружения обеспечивает учёт памяти материала.

Алгоритм реализован в программных комплексах на Python и C++. Проведённые численные эксперименты подтвердили высокий порядок аппроксимации, устойчивость и сходимость метода.

Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект №23-11-00035).

## ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ МНОГОФАЗНОГО ФИЛЬТРАЦИОННОГО ТЕЧЕНИЯ С ПРОМЕЖУТОЧНЫМ ВОДОНАСЫЩЕННЫМ СЛОЕМ

П.И. Кожурина \*<sup>1</sup> В.А. Шаргатов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

\*polinakozhurina2020@gmail.com

Исследуется устойчивость вертикального многофазного течения, возникающего при вытеснении газа нефтью из пласта. Также рассматривается усложненная модификация задачи с промежуточным водонасыщенным слоем, разделяющим зоны газа и нефти. Нарушение устойчивости межфазных границ приводит к образованию газовых и водяных пальцев и, как следствие, формированию остаточной нефти.

Линейная устойчивость изначально плоских границ, разделяющих, соответственно, области газа и воды, а также воды и нефти, исследуется как в рамках закона Дарси, так и с учётом инерционных эффектов — на основе обобщённого закона фильтрации Форхгеймера. Для двухфазного случая методом нормальных мод исследована спектральная (линейная) устойчивость решения, полученного при рассмотрении задачи о вытеснении слоя жидкости газом в пористой среде. Получены дисперсионные соотношения, описывающие рост возмущений поверхности жидкость–газ. При рассмотрении многофазной задачи обсуждаются два случая эволюции возмущений. В первом случае начальные возмущения накладываются только на границу раздела газ–вода. Во втором случае малые возмущения одинаковой амплитуды присутствуют на обеих межфазных границах — газ–вода и вода–нефть.

Установлено, что характер взаимодействия возмущений на межфазных границах определяется толщиной водонасыщенного слоя, длиной волны возмущений, вязкостью нефти, и градиентом давления. Численные расчёты показывают, что возмущения на границе вода–нефть развиваются значительно медленнее по сравнению с возмущениями на границе газ–вода. Показано, что существует критическое значение толщины водонасыщенного слоя: при превышении этого значения влияние возмущений на границе газ–вода на поведение границы вода–нефть становится несущественным.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (код проекта 24-11-00222), <https://rscf.ru/en/project/24-11-00222/>.

## **ЗАДАЧА О ПОИСКЕ ПРОСТОГО ПУТИ ЗАДАННОЙ ДЛИНЫ МЕЖДУ ЗАДАНЫМИ ВЕРШИНАМИ В НЕОРИЕНТИРОВАННОМ ГРАФЕ**

А.А. Мاستихина<sup>1</sup> М.И. Ващенко \*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

\*maksim.vashchenko.5669@mail.ru

В настоящее время теория графов является одним из ключевых инструментов для решения прикладных задач: моделирования транспортных систем, задач социологии, составления расписаний и многих других. Для их решения необходимы эффективные алгоритмы. К таким задачам относится и задача о поиске простого пути заданной длины между заданными вершинами в неориентированном графе. Целью данной работы является определение самого эффективного алгоритма для решения рассматриваемой задачи.

В работе рассматриваются два алгоритма для решения поставленной задачи: модификация существующего алгоритма Йена, изначально предназначенного для поиска  $k$  простых путей между заданными вершинами в графе, и новый разработанный автором алгоритм. Приведена оценка временной сложности для обоих алгоритмов в худшем случае. Выполнена реализация обоих алгоритмов на языке Python для численных экспериментов. Проведены численные эксперименты для сравнения времени работы алгоритмов на графах с различной степенью разреженности. Численно выявлен случай, в котором разработанный алгоритм работает значительно быстрее модификации алгоритма Йена.

## **СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ ЯКОБИ И ГАУССА-ЗЕЙДЕЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ**

Н.С. Волков \*<sup>1</sup> П.В. Храпов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия

\*nikita.volkov01@mail.ru

Проведено исследование сходимости итерационных численных методов Якоби и Гаусса-Зейделя решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с комплексными и вещественными матрицами без предположения об их диагональном преобладании.

Для СЛАУ с двумя и тремя неизвестными аналитически определены области сходимости каждого из методов, а также установлены взаимосвязи между этими областями.

Разработан алгоритм проверки сходимости на основе комплексного аналога критерия Гурвица, и дана его программная реализация на языке Python для случая трех неизвестных.

Выполнено статистическое сравнение сходимости методов при решении СЛАУ с вещественными матрицами размерностей от двух до пяти. Для СЛАУ с двумя неизвестными оба метода демонстрируют идентичное поведение — либо оба сходятся, либо оба расходятся. Однако с увеличением размерности системы наблюдается значительное преимущество метода Гаусса-Зейделя, который демонстрирует более высокую частоту сходимости по сравнению с методом Якоби. В то же время в отдельных случаях возможна и обратная ситуация. В целом результаты показывают, что по мере роста размерности системы метод Гаусса-Зейделя обладает лучшей сходимостью, чем метод Якоби.

## **ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА НЬЮТОНА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ФИЛЬТРОВ ОБОБЩЁННЫХ ВЕЙВЛЕТОВ МЕЙЕРА**

И.И. Федоров \*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>МГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия

\*i.fedorov2023@mail.ru

Вейвлет-преобразование служит эффективным инструментом для обработки данных. Оно основано на применении пары фильтров (низкочастотного и высокочастотного), которые разделяют сигнал на сглаженную аппроксимирующую составляющую и детализирующие коэффициенты. Многоуровневое разложение позволяет анализировать особенности данных на различных масштабах.

Для преобразования можно использовать фильтры обобщённых вейвлетов Мейера, демонстрирующие свою эффективность в задачах подавления шумов, сжатия сигналов и изображений. Однако обычно для вычисления коэффициентов этих фильтров применяют методы численного интегрирования, для которых предварительно необходимо вычислять значения тригонометрических рядов с высокой точностью, что создает дополнительные вычислительные сложности.

В качестве альтернативы предлагается подход, основанный на решении системы нелинейных уравнений методом Ньютона, что исключает необходимость промежуточного этапа вычисления рядов. Проведенные расчеты демонстрируют, что фильтры, полученные таким способом, обеспечивают значительно более точное восстановление исходного сигнала по сравнению с фильтрами, рассчитанными методами численного интегрирования.

## **Секция «Численные методы в задачах механики и математической физики»**

### **ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА С ПОВЫШЕННЫМ ПОРЯДКОМ ТОЧНОСТИ В ДВИЖУЩИХСЯ ОБЛАСТЯХ И ГЕМОДИНАМИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ**

Ю.В. Василевский \*<sup>1</sup> К.М. Терехов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>ИВМ РАН, Москва, Россия

\*yuri.vassilevski@gmail.com

Приводятся две формулировки уравнений Навье–Стокса в движущихся областях и два подхода к дискретизации повышенного порядка точности этих формулировок. Сравняются численные решения как на аналитическом решении, так и для задачи с клиническими данными. Дается обобщение одного из подходов на случай модели свертывания крови.

### **О ВОЗМОЖНОСТИ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ВИХРЕВОЙ ДИНАМИКИ В ПРОБЛЕМЕ ГЕНЕРАЦИИ ЗВУКА ТУРБУЛЕНТНОСТЬЮ**

В.Ф. Копьев \*<sup>1</sup> С.А. Чернышев<sup>1</sup>

<sup>1</sup>ФАУ «ЦАГИ», Москва, Россия

\*vkopiev@mktsagi.ru

Рассмотрены колебания некоторых вихревых течений, характеризующихся наличием конкурирующих механизмов акустической неустойчивости и майлсовской диссипации, баланс которых существенно меняется при малом изменении среднего течения. При численном моделировании таких течений среднее течение может трансформироваться за счет диссипативных свойств расчётной схемы, и баланс между двумя физическими механизмами, ответственными за генерацию звука, может быть нарушен (неустойчивое течение станет диссипативным или наоборот). В то же время, для рассматриваемых течений имеются теоретические результаты, что делает их эффективными тестовыми моделями для верификации численных методов.

Ранее с помощью малодиссипативного метода Кабаре было успешно проведено численное моделирование неустойчивости колебаний простейшего 2D течения такого типа, однако вопрос о нелинейном развитии неустойчивости остался открытым. Для более сложных 3D течений (например, турбулентное вихревое кольцо), проблема численного моделирования колебаний, правильно учитывающего баланс описанных механизмов, остается нерешенной даже на малых временах.

Обсуждается иерархия модельных задач, на примере которых могут быть рассмотрены важные проблемы, возникающие при численном моделировании генерации шума турбулентными потоками, в том числе в задачах, имеющих технологический интерес.

### **МОДИФИКАЦИЯ РАЗРЫВНОГО МЕТОДА ГАЛЕРКИНА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ВРЕМЕНИ**

М.Е. Ладонкина \*<sup>1</sup> В.Ф. Тишкин<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша Российской академии наук, Москва, Россия

\*ladonkina@imamod.ru

При расчетах разрывным методом Галеркина, часто возникает потеря точности в областях локализации ударных волн. Данный эффект наблюдается при расчетах и другими схемами повышенного порядка аппроксимации. Одним из решений данной проблемы была бы методика, сохраняющая идеологию схем сквозного счета, распознающая положение ударных волн, эффективно подавляя наличие нефизических осцилляций и сохраняющая точность методики в областях гладкости решения. В настоящей работе, данная концепция реализуется путем использования в РМГ базисных функций, зависящих от времени. Использование таких функций в областях, содержащих сильные ударные волны, позволяет локально перейти к расчету по схеме Годунова, но на сетке вдвое мельче исходной. Как известно, при использовании классической схемы Годунова энтропийное условие гарантировано выполнено.

Разработанная модификация разрывного метода Галеркина, с использованием базисных функций, зависящих от времени позволяет естественным образом устойчиво рассчитывать сильные разрывы. Ключевым моментом данной схемы является алгоритм определения функции  $\alpha(x, t)$ , отвечающую за точность определения положения разрывов численного решения и, соответственно, качество вычислительной схемы. Серия выполненных расчетов позволяет говорить о возможности применения предложенной схемы для решения задач с наличием областей высоких градиентов решения. При решении задач на подробной сетке новой модификацией РМГ осцилляции в численном решении отсутствуют, в то время как при решении классическим разрывным методом Галеркина наблюдается наличие осцилляций. Накладывая дополнительные условия на функцию  $\alpha(x, t)$  можно добиться выполнения энтропийного неравенства, поскольку при  $\alpha(x, t)$  тождественно равной 1 схема переходит в классическую схему Годунова первого порядка, для которой энтропийное неравенство выполнено.

## **ЧИСЛЕННАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТА МЛАДШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ**

В.И. Васильев \*<sup>1</sup> А.М. Кардашевский<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова, Якутск, Россия  
\*vasvasil@mail.ru

В докладе речь будет идти о двух обратных задачах для параболического уравнения с неизвестными коэффициентами младшей производной для параболического уравнения с младшей производной по пространственной переменной.

Первая задача заключается в одновременном определении пары функций  $u(x, t)$ ,  $p(t)$  в предположении, что идентифицируемый коэффициент является функцией только от времени. В ней помимо начального и граничных условий задается и условие переопределения, необходимое для идентификации неизвестного коэффициента конвективного члена параболического уравнения. При этом условие переопределения задаем в виде интеграла по пространственной переменной  $t \in (0, T]$ . Идея численного метода, в первую очередь, состоит в построении дискретного аналога рассматриваемой обратной задачи. Затем на каждом временном слое полученную систему, с помощью метода декомпозиции, расцепляем на две системы алгебраических уравнений с одной и той же матрицей. Далее из дискретного аналога условия переопределения находим значение неизвестного коэффициента.

Во второй обратной задаче также одновременно определяем функции  $u(x, t)$  и  $p(x)$ . Для определения первой достаточно задать начальные и граничные условия. Необходимое условие переопределения для идентификации зависящего от пространственной переменной коэффициента конвективного члена задаем в виде интеграла по времени для

$x \in (0, l]$ . Для численного решения рассматриваемой коэффициентной обратной задачи сначала построим ее конечно-разностный аналог. Для определения решения полученной системы уравнений используем итерационный метод сопряженных градиентов.

Обсуждаются результаты численной реализации предложенных методов на модельных примерах на разных пространственно-временных сетках. Они показали их высокую эффективность и хорошую точность.

## ACTIVE FLUX METHODS ON A SPHERE

N. Afanasev \*<sup>1</sup> R. Abgrall<sup>1</sup>

<sup>1</sup>University of Zurich, Zurich, Switzerland

\*nikita.afanasev@math.uzh.ch

In recent years, Active Flux method, first introduced by T. Eymann and P. Roe, has been adapted to solve many problems for hyperbolic systems of PDEs on orthogonal and polygonal meshes. Typically, in Active Flux two types of mesh variables are used: cell averages and point values at nodes and edges of the mesh (in 2D planar case). The evolution of cell averages is approximated with a finite volume scheme for conservative form of hyperbolic equations, and the evolution of point values is handled with a finite difference scheme for the characteristic form of equations. In such way, both conservative and characteristic nature of the equations is captured in the numerical method.

In this talk, we introduce the generalization of Active Flux method on triangular meshes to hyperbolic problems on a sphere. For the finite volume part, we rewrite the fluxes using the tangent vectors instead of normals to get a geometry-compatible scheme. For the point values update part, we use local projections of spherical triangles and introduce a quasi-polynomial reconstruction of mesh functions on planar projected triangles to find the gradients. Some tests for linear hyperbolic problems on a sphere are demonstrated. It is worth noting that the use of local projections allows to generalize this method to problems on an arbitrary manifold.

## ПОДХОД К ЧИСЛЕННОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ ГЛОБАЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ НА СФЕРЕ, СВОБОДНЫЙ ОТ ПРОБЛЕМЫ ПОЛЮСОВ

А.В. Соловьев \*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

\*solovjev@cs.msu.ru

Задачи глобальной циркуляции атмосферы, глобальные течения океана и другие задачи требуют решения систем уравнений на полной сфере. Традиционный подход предусматривает запись уравнений сохранения в сферических координатах. При этом в районе полюсов неизбежно возникают две особые точки, в которых сферическая система координат вырождается. Вблизи от этих особых точек теряется точность расчета, а сходящиеся к полюсам линии сетки делают неприемлемо малым расчетный шаг по времени.

Для преодаления этих эффектов применяются различные подходы, среди которых - использование нескольких сеток, фильтрация решения вблизи полюсов, использование в каждой ячейке своей локальной системы координат (опять-таки сферической) и др. Все эти подходы требуют дополнительных усилий по сохранению консервативности. Между тем, существует естественный подход, кардинальным образом решающий указанные проблемы полюсов. Поход заключается в отказе от использования уравнений сохранения импульса в сферической системе координат и использованию закона сохранения момента импульса.

Показано, что два указанных подхода математически эквивалентны, за исключением применения во втором случае невыражающейся системы координат. Конечно-объемные разностные схемы естественным образом и без специальных усилий оказываются консервативными. Соответствующие выкладки и тестовые расчеты приведены на примере системы уравнений мелкой воды.

## **ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ НА ОСНОВЕ СХЕМЫ КАБАРЕ НА ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНЫХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ РАСЧЕТНЫХ СЕТКАХ**

Д.Г. Асфандияров \*<sup>1</sup> В.Г. Кондаков<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, Москва, Россия  
\*dasfandiyarov@ibrae.ac.ru

Приближение мелкой воды широко используется для моделирования различных гидрологических процессов в поймах и руслах рек, каналах, водоемах проточного типа, а также в прибрежных зонах. Данные уравнения гиперболического типа описывают законы сохранения массы и импульса и определяют связь между полем течения и изменением глубины воды с учетом действия внешних сил и неровностей рельефа. Моделируемые течения могут включать в себя области, характеризующиеся большими перепадами параметров потока, или гидравлические разрывы. К численным методам должны предъявляться особые высокие требования к надежности и точности моделирования подобного рода решений. Также, при расчете гидродинамических течений в областях со сложной геометрией во многих случаях необходимо использовать расчетные сетки, адаптированные к границам области.

В данной работе для моделирования подобного рода задач представлена численная методика решения уравнений мелкой воды на основе схемы КАБАРЕ на четырехугольных криволинейных расчетных сетках. Метод позволяет рассчитывать различные режимы течения с учетом неровного рельефа дна и подвижной береговой линии. Апробация метода проводится на серии тестовых задач.

## **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ПРОЦЕССА В СЛОЕ КАТАЛИЗАТОРА С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФОРМОЙ ЗЕРЕН**

О.С. Язовцева \*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Национальный исследовательский Мордовский государственный университет,  
Саранск, Россия

\*kurinaos@gmail.com

Доклад посвящен разработке математической модели и вычислительного алгоритма для исследования нестационарного процесса в слое катализатора с цилиндрической формой зерен.

Математическая модель двухфазная, она учитывает диффузию реакционной смеси в поры зерна катализатора, изменения концентраций в ходе многостадийных гетерогенных химических реакций, сопутствующий им вынужденный конвективный перенос в зерне, тепломассоперенос реакционной смеси по длине слоя и теплопроводность скелета катализатора. Цилиндрическая форма зерна катализатора обуславливает осесимметричную постановку уравнений диффузии-конвекции-реакции. Уравнения тепломассопереноса для реакционной смеси по длине слоя взяты в приближении модели идеально го вытеснения.

Вычислительный алгоритм для исследования разработанной модели построен на основе принципа расщепления по физическим процессам. Для эффективного интегрирования уравнений диффузии-конвекции-реакции и теплопроводности к ним применена регуляризация по Б.Н. Четверушкину.

Модель и алгоритм показали хорошую согласованность расчетных результатов с имеющимися экспериментальными данными и аналитическими решениями.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-21-00242, <https://rscf.ru/project/25-21-00242/>.

## **НЕПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА, ИЛИ О НЕЛЕГКОМ ПУТИ В CFD ПРИЛОЖЕНИЯ**

П.А. Бахвалов<sup>1</sup> В.Г. Бобков<sup>1</sup> А.В. Горобец<sup>1</sup> А.П. Дубень\*<sup>1</sup> Н.С. Жданова<sup>1</sup>

<sup>1</sup>ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия

\*gorobets@keldysh.ru

Доклад посвящен внедрению научных результатов, реализованных в коде Noisette, в промышленную практику. Точнее, отчаянным попыткам внедрения, с переменным успехом и пока не очевидными результатами, а также сложностям на этом пути. Код предназначен для моделирования турбулентных течений в задачах аэродинамики и акустики. Будет кратко описана вычислительная методика, в основе которой схемы EBR на неструктурированных сетках и неявные схемы по времени; различные подходы к моделированию турбулентности, включая RANS, LES и гибридные подходы семейства DES; многоуровневое распараллеливание для гибридных суперкомпьютеров. Основное внимание будет уделено решениям, нацеленным на повышение робастности и расширение практической применимости. В число таких решений входит многосеточный метод для ускорения сходимости стационарных расчетов, стабилизирующая модификация схемы EBR, применение пристеночных функций, а также проблемно-ориентированные решения.

## **СЕМЕЙСТВО КВАЗИОДНОМЕРНЫХ СХЕМ ПОВЫШЕННОЙ ТОЧНОСТИ ДЛЯ РАСЧЕТА ЗАДАЧ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ НА НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ СЕТКАХ**

М.В. Абакумов<sup>1</sup> И.В. Абалакин<sup>2</sup> П.А. Бахвалов<sup>2</sup> В.А. Исаков<sup>1</sup> Т.К. Козубская\*<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

<sup>2</sup>Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия

\*tkozubskaya@keldysh.ru

При моделировании промышленных задач газовой динамики выбор численного метода приводит к поиску компромисса между вычислительной стоимостью и точностью. Семейство квазиодномерных схем для неструктурированных сеток представляет собой одно из эффективных решений. В настоящее время методы данного семейства, известные как EBR (Edge-Based Reconstruction) схемы, активно развиваются. В частности, на них основан вычислительный алгоритм кода NOISEtte.

EBR схемы, обладающие не более, чем вторым порядком точности на произвольных неструктурированных сетках, обеспечивают повышенную точность в смысле величины ошибки численного результата. Это происходит благодаря использованию при определении численных потоков на границах объемов реберно-ориентированных реконструкций переменных. Реконструкции строятся так, что схема автоматически трансформируется в конечно-разностный метод высокого порядка точности при работе на сетках, переходящих сами в себя при сдвиге на любое свое ребро. Такие сетки можно рассматривать как аналог равномерных сеток в одномерном случае.

В докладе дается обзор EBR схем и рассматриваются их модификации для решения задач с разрывами. Особое внимание уделяется новой EBR-MP схеме, основанной на применении реконструкций, сохраняющих монотонность. Приводятся примеры решения модельных задач и задач для авиационной промышленности.

## **О ПРИМЕНЕНИИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ТЯЖЕЛЫХ АВАРИЙ АЭС**

А.С. Филиппов \*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт проблем безопасного развития атомной энергетики, Москва, Россия

\*phil@ibrae.ac.ru

Авария с потерей теплоносителя в реакторе типа ВВЭР достигает тяжелой фазы вследствие осушения активной зоны за счет остаточного тепловыделения накопленных продуктов деления, при недостаточном теплоотводе. Ядерное топливо плавит свое окружение, расплав перемещается, плавит корпус реактора и может выйти за его пределы.

Средства локализации и управления авариями основаны на их математических моделях, воплощенных в расчетных средствах – кодах. Результаты расчетов типовых сценариев тяжелой аварии лежат в основе одного из разделов общего отчета по обоснованию безопасности АЭС, необходимого для лицензирования АЭС. Принятие решений о приемлемости рассчитанных последствий аварии базируется на анализе рисков – более высокие экономические и др. издержки имеют меньшую вероятность. Это позволяет ограничить пессимизм исходных предположений о нагрузках на систему и снизить чрезмерные требования по противодействию им, но задает высокие требования к качеству численного моделирования – минимизация погрешностей моделирования и аппроксимации. Пределы совершенствования ставятся неопределенностями входных данных.

Подходы расчетных кодов основаны на моделях сплошной среды, сопряженных с разделами ядерной физики, термохимии и др. Разнообразие физики определяет выбор и аранжировку расчетных средств: комплексные расчеты АЭС как правило (хотя и не всегда) основаны на простых подходах и балансных 0D-1D моделях. Более сложные методы (многомерная вычислительная гидродинамика (CFD), нейтроника, механика твердого тела) обычно применяются в отдельных подзадачах, решаемых с разными целями. Потребности в параллелизации отдельных расчетов в случае, например, расщепления по отдельным явлениям, обычно невысоки. Эталонные задачи, например, CFD-калибровка моделей, могут потребовать большего, в зависимости от метода и требований к качеству эталона.

В многовариантных Монте-Карло (МК) расчетах сценариев аварийных событий потребности в количестве вычислительных ядер умножаются на количество вариантов (~100). Такие расчеты (анализ неопределенностей) проводятся для оценки чувствительности к вариации входных данных, отчасти – для оценок функции распределения целевого параметра(ров) и др.

В докладе, после краткого введения, упомянуты численные методы, применяемые для анализа тяжелых аварий в настоящее время, отмечены возможные уточнения, связанные с внедрением полиразмерных подходов, и естественные ограничения, связанные со сложностью процессов и неопределенностями входных данных. Охарактеризована методология, основанная на последовательном анализе рисков и систематическом применении МК расчетов для анализа безопасности АЭС, с вытекающими потребностями в вычислительных ресурсах.

## КОД CABARET-SC1 ДЛЯ ЗАДАЧ ВОДОРОДНОЙ БЕЗОПАСНОСТИ

В.Ю. Глотов \*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>ИБРАЭ РАН, Москва, Россия

\* glotov-v@yandex.ru

В ИБРАЭ РАН разрабатывается CFD код «CABARET-SC1», для численного анализа задач водородной взрывобезопасности объектов инфраструктуры атомной и водородной энергетики. Для аппроксимации уравнений многокомпонентной газовой динамики используется балансно-характеристическая схема КАБАРЕ, обладающая улучшенными дисперсионными и диссипативными свойствами в классе схем второго порядка точности с компактным вычислительным шаблоном. Данный подход позволяет проводить моделирование турбулентных течений при неполном разрешении мелкомасштабной турбулентности без использования настроечных параметров, что дает повышенные прогнозные возможности в части моделирования перемешивания газовых смесей. Значительную часть валидационной базы кода составляют эксперименты международных (ERCOSAM-SAMARA, HYMERES и др.) и российских (РФЯЦ ВНИИТФ) проектов, направленным на изучение механизмов формирования и разрушения стратификации водорода, в том числе при работе систем безопасности. Для расчета задач горения и детонации водородосодержащих газовых смесей разрабатывается модуль «CABARET-COMBUSTION», в котором реализованы современные математические модели горения и детонации. В данных задачах помимо барических нагрузок важно также рассчитывать тепловые нагрузки от излучения горячих продуктов реакции. Излучение также может оказывать влияние на стратификацию водорода в горячей и влажной атмосфере контейнента. Для моделирования теплообмена излучением в коде «CABARET-SC1» был реализован конечно-объемный метод дискретных ординат (FVM). Для валидации модели излучения использовались данные экспериментов серии H2P2 программы HYMERES-2 и эксперимента Национальной лаборатории Сандия по изучению характеристик турбулентного диффузионного водородного пламени. В данной работе представлен краткий обзор математических моделей, реализованных в коде «CABARET-SC1», и результатов их валидации, обсуждаются дальнейшие направления развития кода.

## ВАЛИДАЦИЯ МОДЕЛИ CABARET-MFSH НА ЗАДАЧЕ ИНТРУЗИВНОГО ТЕЧЕНИЯ

В.М. Головизнин<sup>1</sup> Павел А. Майоров \*<sup>1</sup> Петр А. Майоров<sup>1</sup> А.В. Соловьев<sup>1</sup>

<sup>1</sup>МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

Интрузивные течения — это распространение жидкости промежуточной плотности вдоль границы раздела слоёв в стратифицированной среде. В данной работе представлено численное моделирование задачи интрузивного течения, на основе лабораторных экспериментов Sutherland, с использованием модели CABARET-MFSH. Эта гидростатическая модель описывает динамику жидкости с переменной плотностью и свободной границей. Вычислительный алгоритм основан на методе гиперболической декомпозиции – представлении многослойной среды в виде отдельных слоев, взаимодействующих через границы раздела.

Экспериментальная установка представляет собой резервуар, разделённый перегородкой на две части: одна содержит двухслойную жидкость с плотностями  $\rho_0$  и  $\rho_1$ , другая — жидкость промежуточной плотности  $\rho_l$ , удовлетворяющей неравенству  $\rho_0 < \rho_l < \rho_1$ . После снятия перегородки жидкость плотности  $\rho_l$  начинает распространяться вдоль границы между слоями. Модель показывает хорошее совпадение с экспериментальными данными.

# КОД CABARET-COMBUSTION ДЛЯ ЗАДАЧ ВОДОРОДНОЙ ПОЖАРО- И ВЗРЫВОБЕЗОПАСНОСТИ

А.В. Данилин \*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>ИБРАЭ РАН, Москва, Россия

\*bass-4@yandex.ru

В ИБРАЭ РАН разрабатывается CFD код «CABARET-COMBUSTION», для численного анализа задач водородной взрывобезопасности объектов инфраструктуры атомной и водородной энергетики в LES приближении. Для аппроксимации уравнений многокомпонентной газовой динамики используется балансно-характеристическая схема КАБАРЕ, обладающая вторым порядком аппроксимации по пространству и времени, низкую численную диссипацию и компактный вычислительный шаблон. В рамках кода реализован алгоритм КАБАРЕ для многокомпонентных реагирующих газовых смесей, включающий подход к разрешению звуковых точек. В код включены модель крупномасштабного горения перемешанных горючих смесей, основанный на модели турбулентного замыкания пламени, модель детонации, основанная на одностадийной необратимой химической кинетики, модель струйного горения, основанная на модели диссипации вихрей. Код валидирован на ряде задач, связанных с горением и детонацией водородно-воздушных смесей в открытом пространстве и загроможденных каналах различной конфигурации. Расчеты по коду участвовали в слепой фазе международного бенчмарка ETSON-SAMHYCO-NET benchmark, основанного на экспериментах на установке ENACCEF-2. В данной работе рассмотрены основные результаты валидации кода «CABARET-COMBUSTION».

## РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ПАРАМЕТРАМИ НА СЕТКЕ ШИШКИНА МНОГОСЕТОЧНЫМ АЛГОРИТМОМ

С.В. Тиховская \*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия

\*s.tihovskaya@yandex.ru

Известно, что применение классических разностных схем для сингулярно возмущенных задач приводит к большим погрешностям при малых значениях параметров возмущения. Рассмотрена краевая задача для нелинейного сингулярно возмущенного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с двумя малыми параметрами, влияющими на конвекционный и диффузионный члены, на кусочно-равномерной сетке. Для линеаризации используются итерации Ньютона и Пикара. Для нахождения решения задачи на каждой итерации применяется разностная схема второго порядка на сетке Шишкина, которая сходится равномерно по обоим малым параметрам. Для уменьшения требуемого количества арифметических операций при реализации разностной схемы предлагается каскадный многосеточный алгоритм. Для повышения точности разностной схемы, применяется экстраполяция Ричардсона с использованием известных решений разностной схемы на двух сетках. Получена равномерная по обоим малым параметрам оценка первой производной решения дифференциальной задачи в случае различных малых параметров. Обсуждаются результаты численных экспериментов.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, проект FWNF-2022-0016.

# ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО РЕЖИМА РЕЗКОГО НАГРЕВА ПЛАСТИНЫ

В.Н. Ханхасаев\*<sup>1,2</sup> С.А. Баиров<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления,  
Улан-Удэ, Россия

<sup>2</sup>Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова, Улан-Удэ, Россия  
\*hanhvladnick@mail.ru

В докладе рассматривается математическая модель и конечно-разностная схема её численного решения для процесса нагрева пластины, ограниченной по двум пространственным переменным, которую можно считать, например, двухмерной моделью фундамента. Приведены недостатки использования классического параболического уравнения теплопроводности для этого случая и обоснование использования смешанного уравнения.

Для неявной разностной схемы используется интегро-интерполяционный метод для уменьшения погрешностей. Квазилинейная схема используется для решения уравнения с нелинейным коэффициентом теплопроводности. Первые граничные условия находятся на левой и на правой границах пластины по пространственной переменной  $x$ . Третьи граничные условия находятся на верхней и нижней границах по пространственной переменной  $y$ . Заданы начальные условия. Источник тепла в параболической части уравнения при  $t < 0$  равен 0, а в гиперболической части уравнения при  $t > 0$  начинается резкий нагрев пластины. Задача решена численно в пакете Mathcad-15 с использованием локально-одномерной схемы. В докладе приводятся результаты работы программы численного решения корректно поставленной смешанной начально-краевой задачи для нелинейного гипербола-параболического уравнения теплопроводности в виде графиков и анимаций температурного поля. Получен сертификат о государственной регистрации программы.

## КОНЕЧНО-РАЗНОСТНАЯ ДИСКРЕТИЗАЦИЯ НЕГИДРОСТАТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ АТМОСФЕРЫ НА СЕТКЕ КУБИЧЕСКАЯ СФЕРА, СОХРАНЯЮЩАЯ ЭНЕРГИЮ

Д.А. Марханов\*<sup>1,2</sup> В.В. Шашкин<sup>1,2,3</sup> Г.С. Гойман<sup>1,2,3</sup>

<sup>1</sup>Институт вычислительной математики им. Г.И. Марчука РАН, Москва, Россия

<sup>2</sup>Гидрометцентр России, Москва, Россия

<sup>3</sup>Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия

\*d.markhanov@inm.ras.ru

В данной работе представляется пространственная аппроксимация высокого порядка точности для негидростатических уравнений динамики атмосферы в новой разрабатываемой модели атмосферы высокого разрешения на квазиравномерной сетке кубическая сфера. Ключевой особенностью работы является применение конечно-разностного метода суммирования по частям (Summation-by-parts finite difference, SBP-FD). Метод SBP-FD позволяет построить устойчивые аппроксимации высокого порядка горизонтальных производных на сетке кубическая сфера. Более того, горизонтальные градиент и дивергенция, построенные с помощью SBP-FD, удовлетворяют дискретному аналогу теоремы Остроградского-Гаусса, что позволяет построить дискретизацию, сохраняющую массу и энергию, и что представляет особый интерес при моделировании климата. Построенная дискретизация была испытана на ряде общепринятых идеализированных тестовых задач, и полученные численные результаты хорошо согласуются с эталонными решениями. Ожидается, что в дальнейшем полученная дискретизация будет переведена на GPU для расчетов с высоким разрешением сетки.

Работа поддержана Отделением Московского центра фундаментальной и прикладной математики в ИВМ РАН (Соглашение с Минобрнауки России № 075-15-2025-347)

## **ОБРАБОТКА ЗВУКОВЫХ ТОЧЕК В СХЕМЕ КАБАРЕ ПО МЕТОДУ ЦЗИНЬ-СИНЬ (JIN-XIN)**

А.В. Сержантов \*<sup>1</sup> В.М. Головизнин<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Филиал Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова в г. Сарове, Саров, Россия

<sup>2</sup>Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия  
\*gol@ibrae.ac.ru

При возникновении в численном решении квазилинейных уравнений гиперболического типа т.н. «звуковых точек», когда коэффициент наклона характеристик в соседних расчетных ячейках меняет знак, формируется особенность, требующая, в рамках балансно-характеристического подхода, специального рассмотрения. Эту проблему можно обойти, если приблизить исходное уравнение системой из двух гиперболических уравнений релаксационного типа, исключающих формирование звуковых точек (The Jin-Xin model).

В докладе рассмотрен предельный случай релаксационного подхода при нулевом релаксационном параметре.

## **СХЕМА КАБАРЕ В ЗАДАЧАХ ГЕМОДИНАМИКИ**

В.М. Головизнин<sup>1</sup> В.В. Конопляников<sup>1</sup> П.А. Майоров<sup>1</sup> С.И. Мухин \*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

\*vmmus@cs.msu.ru

Ряд задач гемодинамики требует аккуратных расчетов многомерных течений в выделенных участках кровеносной системы, которая, как правило, рассматривается в квазиодномерном приближении. Сопряжение многомерной и квазиодномерной систем уравнений гемодинамики осуществляется граничными условиями и учитывает влияние локальных особенностей течения на кровеносную систему в целом.

При моделировании течения в выделенных участках сосудов необходимо учитывать сложную, вообще говоря, трехмерную геометрию и подвижность границ расчетной области. Адаптация расчетной сетки к подвижным границам приводит к моделям гемодинамики в смешанных эйлерово-лагранжевых (СЭЛ) переменных.

Классические алгоритмы решения уравнений механики сплошных сред в СЭЛ переменных состоят из трех этапов. На первом этапе решаются уравнения в «чисто лагранжевых» или в «чисто эйлеровых» переменных, на втором этапе вычисляются желательные новые координаты расчетных узлов, на третьем - осуществляется переинтерполяция консервативных величин со старой сетки на новую с учетом законов сохранения. Последний этап является наиболее проблемным и ресурсоемким.

В работе предлагается новый подход к реализации алгоритма КАБАРЕ в СЭЛ - переменных, исключаяющий этап переинтерполяции с одной расчетной сетки на другую и обладающий свойством временной обратимости, гарантирующей полное отсутствие т.н. «аппроксимационной вязкости». Предлагаемый алгоритм, разработанный для решения многомерных задач гемодинамики, обобщается на более широкий класс задач механики сплошных сред.

## **МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НЕОДНОРОДНЫХ ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ И МЕТОДЫ ВЕРИФИКАЦИИ**

М.В. Яшина <sup>\*1,2</sup> А.Г. Таташев<sup>1,2</sup> И.А. Кутейников<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ), Москва, Россия

<sup>2</sup>Московский технический университет связи и информатики (МТУСИ), Москва, Россия

\*mv.yashina@madi.ru

Современные интеллектуальные транспортные системы позволяют собирать детализированные данные о дорожном движении в реальном времени, что актуализирует задачу построения и верификации математических моделей для неоднородных транспортных потоков. Такие потоки характеризуются резкими изменениями плотности, скорости и интенсивности на фоне различных факторов: геометрии дороги, состояния дорожного полотна, погодных условий и поведения водителей. В работе рассматривается класс моделей, сочетающих детерминированный и стохастический подходы, позволяющих учитывать как средние характеристики потока, так и его флуктуации. Представлен алгоритм верификации модели на основе разнородных эмпирических данных, собранных в 2011, 2019 и 2024 гг.. Особое внимание уделено восстановлению недостающих параметров — плотности и скорости — по неполным данным об интенсивности. Рассматриваются различные варианты модели, в том числе новая модификация, предназначенная для учета локальных неоднородностей дорожной сети.

## **СРАВНЕНИЕ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ НА ОБЪЕДИНЕННЫХ СЕТКАХ ВОРОНОГО–ДЕЛОНЕ ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ**

М.М. Чернышов <sup>\*1</sup>

<sup>1</sup>МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

\*chernyshovmm@my.msu.ru

В работе рассматривается применение объединенных расчетных сеток (MVD-сеток — Merged Voronoi–Delaunay), построенных на основе узлов триангуляции Делоне и вершин диаграммы Вороного, для численного решения двумерных краевых задач в анизотропной среде методом конечных элементов.

Предложен двухсеточный подход, формирующий ортодиагональные четырехугольные ячейки, подходящие для согласованных аппроксимаций операторов векторного анализа. Выполнено сравнение различных аппроксимаций: кусочно-линейных, кусочно-квадратичных и с пузырьковыми функциями на треугольных и MVD-сетках.

Проведены расчёты для тестовой задачи диффузии в однородной и анизотропной среде на последовательности сгущающихся сеток. Показано, что MVD-сетки обеспечивают точность, сопоставимую с триангуляцией Делоне, при том же числе степеней свободы, и являются перспективными для развития конечно-объемных и политопных конечно-элементных методов.

## **ЯВНО-НЕЯВНАЯ СХЕМА КАБАРЕ**

В.М. Головизнин<sup>1</sup> Павел А. Майоров<sup>1</sup> Петр А. Майоров<sup>\*1</sup> А.В. Соловьев<sup>1</sup>

<sup>1</sup>МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

\*maiorov.peter@gmail.com

Для повышения точности численного моделирования физических процессов вычислительную сетку приходится локально сгущать, например, в тонких пограничных слоях, ударных волнах и других областях с резкими градиентами. В явных схемах это приводит к жёстким ограничениям на шаг по времени согласно условию устойчивости и расчёты становятся вычислительно затратными. Полностью неявные методы, снимая это ограничение, приводят к решению больших систем линейных уравнений и усложняют распараллеливание кода. Гибридизация сочетает явную аппроксимацию с неявным блоком, сформулированным так, чтобы возникающая система уравнений решалась эффективно, например, за счёт направленного расщепления, предобусловленных итеративных методов или других ускоряющих алгоритмов.

В докладе представлена явно-неявная схема КАБАРЕ, в которой аппроксимация делается неявной вдоль одного выбранного пространственного направления и остаётся явной по остальным. Рассматривается вывод разностных уравнений для динамики слабосжимаемой жидкости. Показана методика сведения построенных разностных уравнений к форме, позволяющей эффективно разрешать введенную неявность. Приводятся результаты тестовых расчётов, демонстрирующие выигрыш по времени при сохранении точности.

## **ИССЛЕДОВАНИЕ АНИЗОТРОПИИ ТРЕЩИНОВАТЫХ СРЕД ПРИ ПОМОЩИ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ**

И.Н. Агрелов \*<sup>1</sup> Н.И. Хохлов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Московский физико-технический институт (НИУ), Долгопрудный, Россия  
\*agrelov.in@phystech.edu

Поиск новых месторождений нефти и газа остаётся одной из приоритетных задач геофизики. Одним из наиболее эффективных и широко применяемых методов решения данной задачи является сейсморазведка, позволяющая восстанавливать строение и свойства подповерхностных геологических структур на основе регистрации колебаний земной поверхности. Одним из таких свойств является анизотропия - зависимость скорости распространения волн от направления. Существенным фактором, вызывающим анизотропию, выступает наличие трещин в геологической среде. Данная работа посвящена численному исследованию анизотропии распространения упругих волн в трещиноватой среде.

Для решения задачи распространения волн применён сеточно-характеристический метод. В рамках работы построена трехмерная сеточная модель среды, содержащей трещины. Была разработана модель трещины, позволяющая учитывать ширину раскрытия и свойства материала заполнителя. Для повышения вычислительной эффективности моделирования реализована параллельная реализация с использованием технологии MPI.

## **ПРИМЕНЕНИЕ СХЕМЫ КАБАРЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДВУХФАЗНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ**

М.С. Турбылев\*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия  
\*turbylev@list.ru

В работе исследуется применение схемы Кабаре для моделирования двухфазных течений в одномерном приближении. Рассматривается двухфазная система уравнений по модели Saurel-Abgrall с двумя давлениями, скоростями и температурами, дополненная учетом трения, гравитации, релаксацией давления и граничными условиями. Была получена характеристическая форма уравнений и вид инвариантов Римана. В схему были

добавлены этапы с моментальной релаксацией скорости, давления и температуры между фазами. Точность схемы проверена на задаче с переносом пузырька газа (ступеньки) в двухфазном потоке. Также было проведено сравнение схемы Кабаре и метода второго порядка точности HLLC+MUSCL на задаче Эйнфельдта с разбеганием объемов жидкости.

## **ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА КАБАРЕ ДЛЯ АНАЛИЗА ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В РЕАГИРУЮЩИХ ГАЗОВЫХ СМЕСЯХ**

И.С. Яковенко \*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Объединенный институт высоких температур Российской академии наук (ОИВТ РАН), Москва, Россия

\*yakovenko.ivan@bk.ru

Процессы горения повсеместно используются в различных областях промышленности и энергетики. Несмотря на богатую историю исследований процессов в химически активных газовых смесях, в данной области непрерывно возникают новые вызовы, продиктованные стремлением к повышению эффективности энергетических установок, снижению выбросов вредных веществ, разработке надежных подходов к обеспечению пожаро- и взрывобезопасности. Численный анализ зарекомендовал себя как эффективный инструмент решения современных фундаментальных и прикладных задач физики горения. Ввиду необходимости разрешения широкого спектра пространственных и временных масштабов, моделирование газодинамических течений в химически активных средах представляет собой одну из наиболее сложных и трудоемких задач вычислительной физики и невозможно без применения высокопроизводительных вычислительных систем и надежных вычислительных алгоритмов.

В данном докладе представлены результаты коллектива Лаборатории вычислительной физики ОИВТ РАН по применению современного бездиссипативного метода вычислительной газодинамики «КАБАРЕ» для исследования процессов воспламенения, нестационарного горения и детонации. На основе решения разработанного авторами набора тестовых задач показана высокая эффективность метода «КАБАРЕ» для моделирования процессов горения. Продемонстрированы результаты трехмерного моделирования особенностей газодинамических течений в ударных трубах и проанализированы механизмы воспламенения газовых смесей за отраженными и падающими ударными волнами. Приведены результаты исследования процессов нестационарного ускорения пламени и перехода к детонации в ограниченных объемах и неограниченном пространстве.

## **Секция «Вычислительные методы, машинное обучение, суперкомпьютерные технологии и их приложения»**

### **СТАТИСТИЧЕСКИЕ АЛГОРИТМЫ И НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ СТЕПЕННЫХ ГИПОТЕЗ КОКСА-ЛЕМАНА В СЛУЧАЕ ПОЛНЫХ И ПРОГРЕССИВНО ЦЕНЗУРИРОВАННЫХ ДВУХ И БОЛЕЕ ВЫБОРОК**

В.И. Тимонин<sup>1</sup> Н.Д. Тяникова<sup>1</sup> А.Э. Чилия \*<sup>1</sup> Л.М. Будовская<sup>1</sup>

<sup>1</sup>МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

\*sashacilia2001@mail.ru

Во многих прикладных задачах необходимо определять зависимости между законами распределения результатов экспериментов, проводимых в различных условиях. В большинстве случаев предполагается неизменность типа распределений, а от внешних факторов зависят их параметры. Зачастую, однако, нет информации о законах распределения случайных величин, поэтому является актуальной задача оценки зависимостей между функциями распределения (надежности) свободными от распределения методами.

Представлены непараметрические критерии типа Колмогорова-Смирнова проверки степенных зависимостей Кокса-Лемана между функциями распределения (надежности) нескольких прогрессивно цензурированных выборок, часто возникающих при испытаниях сложных систем. Статистические критерии основаны на сравнении оценок Каплана-Мейера функций надежности по каждой из выборок. Получены точные и асимптотические распределения статистик при справедливости проверяемых гипотез.

### **ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ОЦЕНКИ СЛОЖНОСТИ ТЕКСТА (ДЛЯ РУССКОГО И АНГЛИЙСКОГО ЯЗЫКОВ)**

О.Ю. Гавенко \*<sup>1,2</sup> С.Д. Обершт<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН,  
Иркутск, Россия

<sup>2</sup>Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных  
технологий, Новосибирск, Россия

\*olga.yu.gavenko@mail.ru

Оценка сложности текста традиционно рассматривается как вопрос классификации текста и может применяться в широком круге задач обработки естественного языка; в качестве классов, как правило, выступают уровни академического образования и CEFR. Использование методов машинного обучения и моделей на основе нейронных сетей позволяет эффективно анализировать большие объемы данных и учитывать различные группы признаков текста, давая, в свою очередь, возможность применения модели к текстам различных тематик, стилей и жанров. В работе представлен аналитический обзор подходов к оценке сложности текста, ключевых особенностей построения моделей для русских и английских текстов в зависимости от языковых различий, выбора алгоритмов и отбора признаков текста, а также показаны результаты проведенных авторами работы экспериментов по оценке сложности текста классическими методами машинного обучения на специфичном наборе количественных признаков.

# РАЗРАБОТКА И АНАЛИЗ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФУЗИОННО-ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

А. А. Алиханов\*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Северо-Кавказский федеральный университет, Ставрополь, Россия

\*aaalikhanov@gmail.com

Рассматривается класс начально-краевых задач для нелинейных уравнений дробно-порядка с временным запаздыванием, содержащих производные Капуто порядков как из (0,1) так и из (1,2). Данная математическая модель описывает процессы с одновременным проявлением субдиффузионных и диффузионно-волновых эффектов. Основные трудности исследования обусловлены совокупным влиянием нелинейных членов, эффектов запаздывания и операторов дробного интегро-дифференцирования различных порядков.

Для анализа задачи предлагается редукция исходной модели к эквивалентной интегро-дифференциальной формулировке, содержащей производную Капуто порядка не выше единицы и интегральные операторы Римана-Лиувилля соответствующих порядков. Данное преобразование позволяет унифицировать математический аппарат и упростить последующий численный анализ.

Численная реализация основана на построении полностью неявной линеаризованной конечно-разностной схемы со вторым порядком точности по времени. Дискретизация включает следующие компоненты: применение трехслойных схем для аппроксимации производной первого порядка; квадратурные формулы второго порядка точности для интегралов Римана-Лиувилля; L<sub>2</sub>-аппроксимацию для дробной производной Капуто; экстраполяционную формулу второго порядка для явной реализации нелинейных членов. Доказана безусловная устойчивость построенной разностной схемы.

Для задач с большими временными интервалами разработан быстрый вычислительный алгоритм, основанный на представлении ядер дробных операторов в виде конечных сумм экспоненциальных функций. Данный подход обеспечивает снижение вычислительной сложности и соответствующее уменьшение требований к оперативной памяти. На основе указанных аппроксимаций построена быстрая модификация L<sub>2</sub>-схемы для эффективного решения рассматриваемого класса задач.

Теоретические результаты подтверждены серией вычислительных экспериментов, демонстрирующих соответствие фактического порядка сходимости теоретическим оценкам и вычислительную эффективность предложенных алгоритмов.

## ЛОКАЛЬНО-ПОДПРОСТРАНСТВЕННО-ИНФОРМИРОВАННЫЕ НЕЙРОННЫЕ ОПЕРАТОРЫ ДЛЯ GMSFEM

С. Степанов\*<sup>1</sup> А. Рудиков<sup>2</sup> В. Фанасков<sup>2</sup> Е. Муравлева<sup>2</sup> И. Оселедец<sup>2</sup> Buzheng Shan<sup>3</sup>  
Yalchin Efendiev<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова, Якутск, Россия

<sup>2</sup>Институт искусственного интеллекта AIRI, Москва, Россия

<sup>3</sup>Texas A&M University, College Station, USA

\*cepe2a@inbox.ru

Нейронные операторы (НО) испытывают сложности при решении высококонтрастных многомасштабных УЧП, поскольку мелкомасштабные неоднородности существенно влияют на точность. Для преодоления этой проблемы обобщенный многомасштабный метод конечных элементов (GMSFEM) использует локализованные спектральные

базисные функции, построенные на грубых сетках, что позволяет эффективно захватывать ключевые многомасштабные особенности при пониженных вычислительных затратах. Однако генерация этих базисов сама по себе ресурсоемка. В предлагаемом подходе мы обучаем НО аппроксимировать подпространство GMsFEM и вводим физически обусловленную функцию потерь, согласованную со структурой подпространства.

## **МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ АТМОСФЕРЫ НА СЕТКЕ КУБИЧЕСКАЯ СФЕРА**

В.В. Шашкин<sup>\*1,2,3</sup> Г.С. Гойман<sup>1,2,3</sup> И.Д. Третьяк<sup>1,3,2</sup> Д.А. Марханов<sup>1,2,3</sup>  
Ж.Б. Хайдапов<sup>3,1</sup>

<sup>1</sup>Институт вычислительной математики им. Г.И. Марчука РАН, Москва, Россия

<sup>2</sup>Гидрометцентр России, Москва, Россия

<sup>3</sup>Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия

\*v.shashkin@inm.ras.ru

Полярная сингулярность географических координат обуславливает плохую параллельную эффективность алгоритмов численного решения уравнений динамики атмосферы на регулярной широтно-долготной сетке. Подавляющее большинство новых моделей атмосферы используют сферические сетки с квазиравномерным разрешением. Перспективная модель атмосферы для задач прогноза погоды и моделирования климата, которая разрабатывается в ИВМ РАН и Гидрометцентре России, использует сетку кубическая сфера. Сетка кубическая сфера получается путем центральной проекции сетки на гранях куба на вписанную сферу.

В докладе приводится формулировка модели и особенности ее реализации. Рассматриваются вопросы горизонтальной конечно-разностной аппроксимации, где главной проблемой является постановка граничных условий на образах ребер и вершин куба. Анализируются результаты численных экспериментов и исследуется вычислительная эффективность и масштабируемость на параллельных ЭВМ. Показана эффективность модели при запусках на 7000 вычислительных ядер.

## **РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ МНОГОМАСШТАБНЫХ ЗАДАЧ С РЕЛАКСАЦИОННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ: ТЕОРИЯ, ПРИМЕР И ПРОТОТИП ИНСТРУМЕНТА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ**

О.П. Стояновская<sup>\*1</sup>

<sup>1</sup>Институт гидродинамики им М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия

\*o.p.sklyar@gmail.com

Математические модели механики сплошных сред часто представляют собой начально-краевые задачи для дифференциальных уравнений в частных производных. При наличии в задаче параметров, значения которых отличаются на порядки, задача оказывается многомасштабной. Для многомасштабных задач известно понятие равномерных численных методов. Их практическая ценность состоит в возможности получать приемлемую точность решения при численном разрешении, не зависящем от малого параметра.

Предложен метод исследования равномерной сходимости по релаксационному параметру, основанный на понятиях релаксационного дисперсионного соотношения и релаксационного приближенного дисперсионного соотношения (ПДС). Показано, что для равномерной сходимости метода по малому параметру необходимо построить ПДС и для него проверить существование релаксационного ПДС. Применимость метода установлена при исследовании лагранжева подхода SPH для моделирования динамики газовзвесей. Показано, что подход частица-частица для моделирования трения приводит к численному методу, не обладающему равномерной сходимостью по малому параметру, а подход частица-сетка позволяет обеспечить равномерную сходимость по этому

параметру. Для упрощения исследований разрабатывается библиотека SymDR, предназначенная для генерации ПДС и визуализации результатов их анализа.

## **ОБОБЩЕННЫЙ МНОГОМАСШТАБНЫЙ МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ МНОГОКОНТИНУАЛЬНОЙ МОДЕЛИ ДИФФУЗИИ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ВРЕМЕНИ**

У.С. Калачикова \*<sup>1</sup> Д.А. Аммосов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова, Якутск, Россия

\*lanasemna@mail.ru

В данной работе представлена новая многоконтинуальная модель диффузии дробного порядка по времени, основанная на производной Капуто и методе осреднения. Модель выводится путем формулирования ячеечных задач с ограничениями и декомпозиции решения на макропеременные. Для решения полученных многоконтинуальных уравнений применяется Обобщенный метод конечных элементов на многомасштабных сетках (GMsFEM), что позволяет эффективно решать многомасштабные задачи со сложной неоднородностью и множеством масштабов. Численные эксперименты демонстрируют точность и эффективность предложенного метода: достигается относительная погрешность решения менее 1%, а вычислительное время сокращается в 10–20 раз по сравнению с методом конечных элементов на подробной сетке. Результаты показывают, что предложенный подход является надежным и эффективным инструментом для моделирования сложных процессов диффузии в неоднородных средах.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ 23-71-30013.

## **HOMOGENEOUS-HETEROGENEOUS PORE-SCALE REACTIVE TRANSPORT WITH FRACTIONAL TIME DERIVATIVE**

V.V. Grigoriev\*<sup>1</sup> D.K. Ivanov<sup>1</sup> A.V. Savvin<sup>1</sup>

<sup>1</sup>North-Eastern Federal University, Yakutsk, Russia

\*v.v.grigorev@s-vfu.ru

This study presents a pore-scale model of a complex homogeneous-heterogeneous reaction. It is based on the Stokes equations, convection-diffusion-reaction equations, and Robin boundary conditions. The fluid is considered non-Newtonian, and the Carreau model of viscosity is employed. A heterogeneous reaction is defined by the Langmuir isotherm, whereas a homogeneous reaction is described by cubic autocatalysis over the entire pore space. The Crank-Nicholson scheme is used for time discretization. Newton's iterative method is implemented to solve a non-linear problem for reactive mass transport and Picard iterations for non-Newtonian fluid flow. The problem is considered in a one-way coupling where fluid flow influences the species transport, but there is no backward influence of the species concentration on the fluid flow. The dimensionless form of equations was used throughout the entire numerical analysis. The influence of the fractional time derivative on the reacting processes is investigated.

This work was supported by the Russian Science Foundation (No. 23-71-30013).

## **MULTICONTINUUM HOMOGENIZATION FOR HETEROGENEOUS POROELASTIC MEDIA**

D.A. Ammosov \*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Chemical and Petroleum Engineering Department, Khalifa University of Science and Technology, Abu Dhabi, UAE

\*dmitrii.ammosov@ku.ac.ae

In this talk, we discuss the multicontinuum homogenization approach. The multicontinuum homogenization represents a general framework for deriving multicontinuum models in heterogeneous high-contrast media. The method consists of several key steps. First, the microscopic solution field is expanded in terms of macroscopic variables that represent average solutions in the corresponding continua. Next, we formulate cell problems with appropriate constraints to capture various homogenized effects for each continuum. Finally, under suitable assumptions, we rigorously derive the multicontinuum equations.

As a primary application, we focus on a poroelasticity problem in heterogeneous high-contrast media. Using the multicontinuum homogenization approach, we derive a generalized multicontinuum poroelasticity model for an arbitrary number of continua. The obtained multicontinuum model extends and generalizes existing multiple-network poroelasticity models.

## **EFFICIENT ALGORITHMS FOR THE COMMUTATIVE QUATERNION EQUALITY CONSTRAINED LEAST SQUARES PROBLEM WITH APPLICATIONS TO COLOR IMAGE RESTORATION**

Dong Zhang\*<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Qufu Normal University, Qufu Shandong, P. R. China

<sup>2</sup>Ammosov North-Eastern Federal University, Yakutsk, Russia

\*dz\_zhangdong@sina.com

The commutative quaternion algebra increasingly serves as a powerful framework in signal processing, color image modeling, and control systems. Within this context, the commutative quaternion equality constrained least squares (CQLSE) problem is essential in modeling complex relationships involving commutative quaternionic variables under linear constraints. However, efficient and reliable computational methods for solving such problems remain underdeveloped.

This talk presents two efficient algorithms for solving the CQLSE problem using structured matrix decompositions. Based on the complex representation of commutative quaternion matrices, we study the QR decomposition and the generalized singular value decomposition (GSVD) in commutative quaternion matrices. We provide theoretical formulations together with practical algorithms derived from these decompositions. Numerical experiments demonstrate the accuracy and robustness of the proposed algorithms. Finally, we apply the developed algorithms to a commutative quaternion model of color image restoration and demonstrate their effectiveness in image restoration tasks.

This work is supported by Young Talent of Lifting Engineering for Science and Technology in Shandong, China (Grant No. SDAST2025QTB033) and by the Russian Science Foundation grant No. 23-71-30013 (<https://rscf.ru/project/23-71-30013/>).

## **БЕССЕТОЧНЫЙ МНОГОМАСШТАБНЫЙ МЕТОД ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ УПРУГОСТИ В МНОГОКОНТИНУАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ**

Д.Я. Никифоров \*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова, Якутск, Россия

\*dju92@mail.ru

В данной статье представлена разработка и апробация бессеточного обобщенного многомасштабного метода конечных элементов (MFGMsFEM) для численного решения задач линейной упругости в многоконтинуальных средах. Предлагаемый метод представляет собой синтез бессеточной аппроксимации, устраняющей ограничения сетки на грубом масштабе, и обобщенного многомасштабного метода конечных элементов (GMsFEM), обеспечивающего эффективное разрешение многомасштабных особенностей. Новизна данной работы заключается в разработке многомасштабных базисных

функций, построенных с использованием как разделенных, так и связанных подходов. Результаты численных исследований демонстрируют высокую точность расчетов при значительном снижении вычислительных затрат по сравнению с традиционным моделированием на подробной сетке методом конечных элементов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (Грант № FSRG-2023-0025).

## **МНОГОМАСШТАБНОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБОБЩЁННОЙ ЗАДАЧИ ДАРСИ-ФОРХГЕЙМЕРА В ТРЕЩИНОВАТЫХ СРЕДАХ.**

М.В. Васильева<sup>1</sup> Д.А. Спиридонов \*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова, Якутск, Россия

\*sepe2a@inbox.ru

В данной работе рассматривается обобщенная модель течения жидкости Дарси-Форхгеймера для трещиновато-пористых сред. Аппроксимация построена на основе метода конечных объемов со встроенной моделью трещин. Мы уменьшаем размер дискретной системы путем построения точной многомасштабной аппроксимации на грубой сетке. В качестве метода понижения порядка мы используем Обобщенный многомасштабный метод конечных объёмов с онлайн-коррекцией. Многомасштабное пространство строится на основе решения локальной линейной спектральной задачи для точной адаптивной аппроксимации коэффициента проницаемости с высоким контрастом путем введения нескольких макромасштабных переменных. Мы показываем, что адаптивный подход, основанный на локальных невязках, точно аппроксимирует процессы фильтрации в трещиноватых пористых средах. Чтобы уменьшить погрешность, связанную с нелинейной природой процесса фильтрации, мы строим адаптивное локальное обогащение многомасштабного пространства на основе локальной невязки. Мы показываем, что несколько адаптивных итераций онлайн-коррекций могут значительно уменьшить ошибку и дать решение с низкой погрешностью для обобщенной модели фильтрации Дарси-Форхгеймера

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 23-71-30013.

## **FAST ALGORITHMS FOR EIGENVALUES OF QUATERNION MATRICES AND THEIR APPLICATIONS**

Zhenwei Guo\*<sup>1,2</sup> V.I. Vasil'ev<sup>2</sup> Tongsong Jiang<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup>Liaocheng University, Liaocheng Shandong, P.R. China

<sup>2</sup>North-Eastern Federal University, Yakutsk, Russia

<sup>3</sup>Linyi University, Linyi Shandong, P.R. China

\*guozhenwei@lcu@163.com

This report briefly analyzes the wide range of applications of quaternion matrix computation in modern science and engineering, including problems in color image processing, three-dimensional signal processing, spatial rotation and quaternion quantum mechanics. The quaternion matrix eigenvalue problem is not only an important branch of numerical linear algebra, but also a fundamental problem in fields such as applied mathematics and physics. However, the computational efficiency of the existing algorithms is relatively low, which limits their large-scale popularization in practical applications.

This report develops three more efficient algorithms for computing the eigenvalues of quaternion matrices based on the algebraic structure and properties of quaternion matrices. Numerical experiments show that the proposed algorithms have high computational efficiency

and are successfully applied to optimize an existing color face recognition scheme based on quaternion matrix eigenvalues. Simulation experiments further validate the significant performance improvement of the algorithms in practical applications.

In summary, this report not only optimizes the performance of the algorithm in the field of quaternion numerical computation, but also provides theoretical support and foundation for applications based on quaternion matrix eigenvalues, as well as other potential technical fields.

This work is supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, supplementary agreement (No. 075-02-2025-1792, March 11, 2025), and by the Russian Science Foundation grant No. 23-71-30013 (<https://rscf.ru/project/23-71-30013/>).

## **ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМ ПРОДОЛЖЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ В СТОРОНУ АНОМАЛИЙ**

П.Н. Вабищевич<sup>1,2</sup> Д.Х. Иванов \*<sup>2</sup> Л.Н. Темербекова<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

<sup>2</sup>Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова, Якутск, Россия

<sup>3</sup>Казахский национальный педагогический университет им. Абая, Алматы, Казахстан

\*ivanov.gx@s-vfu.ru

Рассматривается задача продолжения потенциальных полей с поверхности Земли вглубь. На основе решения такой задачи идентифицируется положение аномалий гравитационного поля. На основе интегрального подхода приближенного решения таких задач гравитационное поле представляется в виде вертикальной производной от потенциала простого слоя. Знакопостоянство плотности эквивалентного простого слоя наследует знакопостоянство плотности аномалий при условии, что поверхность эквивалентного потенциала включает все аномалии. Учитывая это свойство предлагается вычислительный алгоритм продолжения потенциальных полей в сторону аномалий с помощью NNLS метода. Проводятся вычислительные эксперименты для трехмерной постановки задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (Грант № FSRG-2023-0025).

## **MULTICONTINUUM MODELING OF TIME-FRACTIONAL DIFFUSION-WAVE EQUATION IN HETEROGENEOUS MEDIA**

Huiran Bai<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup>Xiangtan University, National Center for Applied Mathematics in Hunan, Xiangtan 411105, Hunan, China

\*202331510101@smail.xtu.edu.cn

This work considers a time-fractional diffusion-wave equation with a high-contrast heterogeneous diffusion coefficient. A numerical solution to this problem can present great computational challenges due to its multiscale nature. Therefore, in this talk, we derive a multicontinuum time-fractional diffusion-wave model using the multicontinuum homogenization method. For this purpose, we formulate constraint cell problems considering various homogenized effects. These cell problems are implemented in oversampled regions to avoid boundary effects. By solving the cell problems, we obtain multicontinuum expansions of fine-scale solutions. Then, using these multicontinuum expansions and supposing the smoothness of the macroscopic variables, we rigorously derive the corresponding multicontinuum model. Finally, we present numerical results for two-dimensional model problems with different time-fractional derivatives to verify the accuracy of our proposed approach.

# АПРОКСИМАЦИЯ ДАННЫХ ТЕМПЕРАТУРЫ АТМОСФЕРЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГАРМОНИК РОССБИ И ДВУХСТРАТЕГИЧЕСКОГО АДАПТИВНОГО АЛГОРИТМА ПЧЕЛИНОЙ КОЛОНИИ

В.И. Сивцева\*<sup>1</sup> В.В. Григорьев<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова, Якутск, Россия  
\*verasivtseva@gmail.com

В работе представлена методология аппроксимации данных температуры атмосферы с использованием гармоник Россби на основе адаптивного алгоритма искусственной пчелиной колонии (TSaABC) с жестким пороговым отсечением. Алгоритм разработан для решения сложных задач оптимизации, связанных с нелинейными пространственно-временными моделями, описывающими динамику крупномасштабных атмосферных волн. Рассмотренные в работе волны Россби играют ключевую роль в динамике атмосферы, поскольку они являются основным механизмом передачи энергии и импульса между различными уровнями атмосферы. Для анализа этих процессов использовались спутниковые данные с инструментов Aura (MLS). Методология исследования заключается в формулировке обратной задачи, в которой минимизируется функционал, состоящий из двух частей: невязки между моделью и данными наблюдений (в терминах L2-нормы), и штрафа за количество используемых гармоник (в терминах L1-нормы). Это позволяет находить минимальное число значимых гармоник, которые достаточно точно описывают наблюдаемую температурную структуру. Для решения этой задачи был применён двухстратегический адаптивный алгоритм TSaABC, который сочетает в себе механизмы глубокой эксплуатации и широкой эксплорации пространства решений. Важным дополнением к алгоритму стало использование жёсткого порогового отсечения (Hard Thresholding), позволяющего исключать малозначимые гармоники в ходе оптимизации и снижать размерность задачи. Численные эксперименты показали, что предложенный метод достигает относительной ошибки порядка 12%, что является хорошим результатом при наличии коротковолновых возмущений, таких как внутренние гравитационные волны. Также было установлено, что алгоритм быстро сходится, благодаря комбинации двух стратегий поиска и адаптивному выбору наиболее эффективных направлений оптимизации.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 23-71-30013.

## ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ КОД ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ ПЛАЗМЫ В ОТКРЫТОЙ ЛОВУШКЕ

М.А. Боронина\*<sup>1</sup> В.А. Вшивков<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия

\*boronina@ssd.sscs.ru

В докладе представлен трехмерный код для численного моделирования динамики пучково-плазменных процессов в открытой ловушке. Для определенных параметров существует возможность наблюдать вытеснение магнитного поля внутри ловушки инжектированными частицами и формирование конфигурации, необходимой для удержания плазмы (диамагнитный режим). В случае осевой симметрии в цилиндрических координатах было показано, что диамагнитная конфигурация возможна, однако сложная нелинейная природа процессов в диамагнитной ловушке и решающая роль кинетических эффектов требуют применения трехмерного численного моделирования. На основе результатов моделирования можно будет определить необходимые условия формирования и устойчивости диамагнитной конфигурации.

Основой кода служит метод частиц-в-ячейках для гибридной модели, в которой ионы описываются кинетически, а электронная компонента описывается уравнениями МГД. Применяется лагранжево-эйлерова декомпозиция, при которой расчетная область равномерно разрезана вдоль оси  $z$ , каждая подобласть обрабатывается одной группой ядер, а частицы в подобласти распределены равномерно между ядрами этой группы, что обеспечивает баланс вычислительной нагрузки. Кроме того, используются специализированные модификации алгоритмов расчета скоростей и координат частиц, плотностей заряда и токов с целью автоматической векторизации вычислений компилятором и, как следствие, сокращению времени работы программы.

Расчеты проведены на процессорах Сибирского суперкомпьютерного центра (ИВ-МиМГ СО РАН, Новосибирск). Концепция гибридной модели создана в рамках гос. задания ИВМиМГ СО РАН FWNM-2025-0005.

## **ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ “РЕАКЦИИ-ДИФFUЗИИ”**

К.П. Ильина \*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова, Якутск, Россия  
\*ilina\_kunnei@mail.ru

Уравнение Колмогорова–Петровского–Пискунова (Фишера) представляет собой классическую модель, описывающую процессы распространения в среде с диффузией и реакцией [1, 2]. Со временем модель приобрела универсальный характер и была успешно адаптирована к задачам физической химии. Зельдович и Франк-Каменецкий применили ее для описания скорости продвижения фронта пламени в реакционно-диффузионных системах, учитывая влияние начальных температур и условий возникновения автокаталитических реакций [3].

В работе рассматривается численная реализация конечно-разностной схемы для одномерных и двумерных задач на основе квазилинейного уравнения КПП(Ф) и его обобщения в виде интегро-дифференциальной модели. Проведены вычислительные эксперименты, подтверждающие формирование устойчивых решений типа бегущих волн и демонстрирующие эффективность предложенного вычислительного алгоритма.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФ 23-71-30013.

### *ЛИТЕРАТУРА*

1. Колмогоров А.Н., Петровский Н.Г., Пискунов Н.С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием вещества, и его применение к одной биологической проблеме // Бюллетень МГУ. Сер. А. Математика и Механика. 1937. 1(6). С. 1–16.
2. Fisher R.A. The wave of advance of advantageous genes // Annals of Eugenics, 1937, vol. 7, no. 4, pp. 355–369.
3. Зельдович Я. Б., Франк-Каменецкий Д.А. К теории равномерного распространения пламени // Докл. АН СССР. – 1938. – Т. 19. – №. 9. – С. 693–697.

## **ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТЕЧЕНИЯ ПРИРОДНОГО ГАЗА В КОЛЛЕКТОРЕ В РАЗНЫХ ПОСТАНОВКАХ**

А.В. Аммосов \*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова, Якутск, Россия  
\*albertdobun@gmail.com

В данной работе представлена математическая модель фильтрации неизотермического природного газа в коллекторе в осесимметричных координатах, рассмотренная в

различных постановках. Основное внимание уделено уравнению энергии, включающему слагаемые такие как, кондуктивный и конвективный теплообмены, адиабатическое расширение и эффект дросселирования:

$$C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + m \left( 1 + \frac{T}{z} \frac{\partial z}{\partial T} \right) \frac{\partial p}{\partial t} + C_p \frac{k}{\mu_g} \frac{p}{RTz} \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{k}{\mu_g} \frac{T}{z} \frac{\partial z}{\partial T} \left( \frac{\partial p}{\partial r} \right)^2, \quad r \in \Omega, \quad t \in (0, \bar{t}] \quad (1)$$

Слагаемые уравнения вызывают интерес влияния на полную постановку уравнения.

Уравнение энергии представлено в четырех различных постановках, проведено численное исследование влияния слагаемых на динамику процесса. Для дискретизации использована неявно разностная схема, реализованная на квазиравномерной пространственно-временной сетке со сгущением узлов вблизи забоя скважины. Сложности встречающиеся при решении уравнении энергии, в котором содержатся уравнения первого и второго порядка преодолены с помощью метода расщепления по физическим процессам.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ, соглашение от 11.03.2025 № 075-02- 2025-1792.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЛЬТРАЦИИ ЦЕЗИЯ-137 С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФИЗИЧЕСКИ-ИНФОРМИРОВАННОЙ НЕЙРОННОЙ СЕТИ

И.И. Копинцу \*<sup>1</sup> С.В. Стрижак<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Московский Авиационный Институт, Москва, Россия

<sup>2</sup>ИСП РАН, Москва, Россия

\*redlonelymountain@gmail.com

Оценка долгосрочного поведения радионуклидов в почвах критически важна для экологического мониторинга и управления последствиями техногенных аварий. В работе предлагается гибридный подход к моделированию переноса Cs-137 в трёх типах почв (супесчаная, чернозём, органическая) с использованием физически-информированной нейронной сети (PINN).

Численная модель основана на решении одномерного уравнения переноса скаляра с учётом влияния слагаемых адвекции, молекулярной диффузии, радиоактивного распада и двухфазной кинетической десорбции. Профиль влагосодержания, определяющий поток, рассчитывается по уравнению Ричардса. PINN обучается на синтетических данных численных решений и физической невязке, обеспечивая точность и физическую согласованность.

Рассмотрены различные способы кодирования типа почвы: скалярный, “one-hot” и “embedding”. Показано, что использование подхода “learnable embedding” обеспечивает лучшие метрики качества и способность к обобщению на невиданные типы почв. Проведен анализ влияния гиперпараметров PINN на значения метрик RMSE, SSIM. Предложенный подход открывает возможности для масштабирования моделей переноса на более широкий класс геосред.

## ФРАКТАЛЬНОЕ СЖАТИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Б.Р. Бабенко \*<sup>1</sup> Н.Н. Труфанов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

\*bbr31@mail.ru

Разработка систем эффективного хранения и передачи больших массивов данных является актуальной задачей современности. Центральное место в построении таких систем занимают алгоритмы сжатия цифровой информации, в частности изображений.

Исследуемые в работе фрактальные алгоритмы позволяют достичь высоких коэффициентов сжатия. Метод основывается на понятии неподвижной точки, определяемой теоремой Банаха. Рассматривается конечный набор сжимающих отображений, совокупность которых образует систему итерируемых функций (СИФ). Согласно теореме коллажей, аттрактор (неподвижная точка) такой СИФ может быть сколь угодно близок к исходному изображению в метрике Хаусдорфа.

Техническая реализация включает разбиение изображения на ранговые и доменные блоки с последующим установлением взаимно-однозначного соответствия между ними посредством сжимающих аффинных преобразований; совокупность этих преобразований образует систему итерируемых функций.

Ввиду высоких вычислительных затрат, присущих данному методу, возникает задача оценки эффективности сжатия для конкретных изображений. Для этого используются методы определения фрактальности изображения, в том числе метод DBC (Differential Box Counting), основанный на понятии размерности Хаусдорфа.

## **КОМБИНАЦИЯ МЕТОДА ДЕКОМПОЗИЦИИ ОБЛАСТИ И СПЕКТРАЛЬНОГО ПРЕДОБУСЛАВЛИТЕЛЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА**

А.А. Манаев \*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, Новосибирск, Россия

\*manaeff.leha@gmail.com

Одним из основных направлений физики горных пород является численная оценка эффективных физических свойств пористых материалов. Так, интерес представляют оценки коэффициентов абсолютной проницаемости, диффузии, коэффициента теплопроводности, удельного электрического сопротивления. Для получения таких оценок необходимо решать уравнение Пуассона для неоднородной среды с большим контрастом коэффициентов.

В работе для решения уравнения Пуассона используется метод сопряженных градиентов с предобуславлителем, основанным на блочном предобуславливании Якоби и учитывающим связь между подобластями путем аппроксимации обратного оператора матричным рядом Неймана. Для решения уравнения в каждой подобласти применяется прямой метод, основанный на спектральном разложении одномерных операторов и последующем применении метода прогонки для решения серии одномерных задач.

## **РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ РАСЧЕТА РЕЖИМОВ СВАРКИ ПОЛИЭТИЛЕНОВЫХ ТРУБ ПРИ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ**

О.А. Аммосова\*<sup>1</sup> Н.П. Старостин<sup>1</sup>

<sup>1</sup>ФИЦ ЯНЦ СО РАН, обособленное подразделение ИПНГ СО РАН, Якутск, Россия

\*oamosova@gmail.com

Рассматривается обратная задача определения теплового источника, обеспечивающего движение фронта кристаллизации при сварке полиэтиленовых труб для газопроводов в условиях низких температур по закономерности, при которой формируется надмолекулярная структура материала сварного шва, обеспечивающая прочное соединение.

При низких температурах воздуха из-за повышенной скорости охлаждения зон термического влияния и сварного шва прочность соединения получается ниже необходимого. При высокой скорости охлаждения процесс формирования надмолекулярной структуры материала прерывается на ранней стадии кристаллизации. Сформировавшиеся надмолекулярные структуры (фибриллы) не обеспечивают необходимую прочность сварного соединения. Поскольку при стандартной сварке в интервале температур воздуха от  $-10$  до  $40$  °С формируется структура, обеспечивающая необходимую прочность, то дополнительная температурная информация для решения обратной задачи получена решением прямой задачи при сварке в условиях температуры воздуха  $20$  °С в точках неподвижной линии. В качестве такой линии взята изотерма близкая к границе зон сварного шва и термического влияния, где чаще всего происходит разрушение сварного соединения.

Приводится пример управления кристаллизацией полиэтилена при сварке в условиях низких температур с использованием функции мощности нагревателя, полученной решением обратной задачи теплопроводности. Показана возможность определения пригодных для практического использования функций мощности нагревателя варьированием количеством точек задания температур и весовых функций. Задавая температурные данные во множестве точек с разными весовыми функциями и решая обратную задачу, можно определить временную функцию мощности нагревателя, приемлемую для реализации управления кристаллизацией при сварке полиэтиленовых труб в условиях низких температур. Найденные функции мощности нагревателя могут быть записаны в простом аналитическом виде для интервалов низких температур и диаметров полиэтиленовых труб и заложены в программное обеспечение аппарата для автоматической сварки. Предлагаемая методика может быть использована для расчетов режимов сварочного аппарата для выполнения исследовательской сварки полиэтиленовых труб при низких температурах.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-29-20135, <https://rscf.ru/project/24-29-20135/>.

## **ОБОБЩЕННЫЙ МНОГОМАСШТАБНЫЙ МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ЗАДАЧ ТЕРМОПОРООПРУГОСТИ С ФАЗОВЫМИ ПЕРЕХОДАМИ**

А.А. Тырылгин\*<sup>1</sup> В.Н. Алексеев<sup>1</sup> М.В. Якобовский<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова, Якутск, Россия

<sup>2</sup>Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша, РАН, Москва, Россия

\*aa.tyrylgin@mail.ru

Проведено моделирование обобщенного многомасштабного метода конечных элементов (GMsFEM) для моделирования термопороупругих систем с фазовыми переходами в неоднородных пористых средах. Термопороупругость включает в себя сопряженное взаимодействие между теплопередачей, потоком жидкости и механической деформацией в явлениях пористых материалов, которые имеют решающее значение для моделирования геотехнических и геофизических систем, особенно в регионах, затронутых вечной мерзлотой. Наличие мелкомасштабных неоднородностей и сложных тепловых эффектов, связанных с фазовыми переходами (например, лед-вода), требует передовых численных методов, способных эффективно разрешать многомасштабное поведение. Используя стратегию понижения многомасштабной модели в оффлайн пространстве, мы строим локализованные базисные функции, которые эффективно фиксируют мелкомасштабные особенности на грубой вычислительной сетке. Подход позволяет точно моделировать термопороупругое поведение с уменьшенными вычислительными затратами. Численные результаты демонстрируют эффективность метода в аппроксимации

полей температуры, давления и перемещения в сложных средах, показывая хорошее соответствие с мелкомасштабными решениями. Предложенная структура представляет собой надежный и эффективный инструмент для моделирования многомасштабных термoporоупругих процессов с фазовыми переходами, актуальных для геотехнических и экологических приложений.

Работа поддержана грантом Российского научного фонда 23-41-00037.

## **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СТВОЛА МНОГОСТВОЛЬНОЙ СКВАЖИНЫ**

М.Н. Захарова\*<sup>1</sup> А.Е. Колесов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова, Якутск, Россия

\*zaharova.mn@s-vfu.ru

Выбор эффективной системы разработки месторождения и методов бурения скважин во многом зависят от геомеханических изменений в коллекторах, которые могут привести к их деформации и разрушению. Традиционное гидродинамическое моделирование часто игнорирует существенные изменения напряженно-деформированного состояния (НДС) коллектора, приводящие к рискам просадки поверхности, снижению проницаемости, повреждению оборудования. Хотя геомеханическое моделирование обеспечивает высокую точность, его вычислительная сложность делает его непрактичным для применения.

Для моделирования НДС многоствольной скважины, используется уравнение порупругости и закона Гука. Модель сопряжена с гидродинамическим симулятором РН-КИМ, обеспечивающим распределение порового давления в пласте. Для численного решения применяется метод конечных элементов, что позволяет детально аппроксимировать сложную геометрию многоствольной скважины. В качестве критериев устойчивости стволов использован модифицированный критерий Кулона-Мора, позволяющий корректно оценивать зоны потенциального разрушения в зависимости от тектонического режима и предела прочности пород.

## **ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ МАГИСТРАЛЬНОГО ГАЗОПРОВОДА В МНОГОЛЕТНЕМЕРЗЛОМ ГРУНТЕ**

В.Г. Кычкина \*<sup>1</sup> А.Е. Колесов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова, Якутск, Россия

\*vg.kychkina@s-vfu.ru

В современных условиях развития нефтегазового комплекса России особое значение приобретает строительство магистральных газопроводов в районах Крайнего Севера, характеризующихся широким распространением многолетнемерзлых грунтов (ММГ). Технология транспортировки газа включает компримирование (сжатие до 7.5–10 МПа с адиабатическим нагревом до +45...+60°С) и охлаждение в аппаратах воздушного охлаждения (АВО) до +20...+30°С. При отсутствии турбодетандерных установок сохраняется положительная температура на выходе, что вызывает тепловое воздействие на многолетнемерзлые грунты

Для моделирования термомеханического взаимодействия трубопровода с грунтами использована модель Стефана [1], которая описывает тепловые процессы с учетом

фазового перехода, поглощения и выделения скрытой теплоты и математическая модель напряженно-деформированного состояния пористой изотропной среды описывается уравнением равновесия. Приводится математическая постановка задачи с соответствующими граничными условиями, строится численная реализация на основе метода конечных элементов. Проведено исследования состояния грунта и трубопровода при наличии и отсутствии теплоизоляции.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Васильев, В.И., и др. Математическое моделирование температурного режима грунтов оснований фундаментов в условиях многолетнемерзлых пород. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия Естественные науки*, (1):142–159, 2017. doi:10.18698/1812-3368-2017-1-142-159.

### **ПРИМЕНЕНИЕ ТЕХНОЛОГИЙ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С УЧЕТОМ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ**

С.П. Степанов<sup>1</sup> А.И. Гуринов\*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова, Якутск, Россия  
\*ajtalgurinow@yandex.ru

Искусственное замораживание грунта (ИЗГ) представляет собой одну из наиболее широко используемых технологий в области геотехнического строительства. Этот метод, разработанный в 1883 году Ф.Х. Пётшем, применяется в подземных проектах, особенно в условиях сложных геологических и гидрологических факторов. В работе рассматривается численное моделирование процессов теплопроводности с учётом фазовых переходов, возникающих при реализации ИЗГ, с использованием метода конечных элементов.

В качестве программной основы выбран комплекс FEniCSx, интегрированный с библиотеками CUDA от NVIDIA. Основное внимание уделено ускорению решения задачи с помощью параллельных вычислений на GPU. Применение интерфейса MPI позволило повысить эффективность сборки матрицы и правой части. Также реализована замена решателя, основанного на библиотеке PETSc, на ускоренный вариант, использующий графические процессоры. Полученные результаты демонстрируют эффективность предложенного подхода.

### **ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ ГЕТЕРОГЕННОЙ РЕАКЦИИ ПРИ ВЫСОКИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА**

В.В. Григорьев<sup>1</sup> А.В. Саввин\*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова, Якутск, Россия  
\*anv.savvin@gmail.com

Процессы фильтрации, катализа, сорбции и накопления загрязняющих веществ в пористых структурах широко применяются в химической технологии, охране окружающей среды и энергетике. Математическое моделирование таких процессов позволяет глубже понять взаимосвязь между геометрией пористой среды, режимом течения и эффективностью массопереноса и накопления вещества. Особенно важен анализ в условиях, когда течение перестаёт быть ламинарным и переходит в режим с локальными вихрями. Целью работы является численное исследование поведения реагента в пористой среде с интенсивным течением.

Рассматривается двумерная область, моделирующая пористую среду в виде совокупности твёрдых непроницаемых включений, окружённых жидкой фазой. Гидродинамика описывается уравнением Навье–Стокса, решаемым методом конечных объёмов

для нестационарного течения при больших числах Рейнольдса. Это позволяет учесть образование вихрей, ускорение потока и сдвиговые напряжения вблизи стенок пор. Перенос концентрации реагента в подвижной жидкости моделируется уравнением конвекции–диффузии с граничной реакцией, описанной линейно-параболической изотермой. Это позволяет описать поведение вещества на поверхности твердой фазы. В результате рассчитываются две ключевые характеристики: кривая прорыва и интегральное накопление вещества на поверхности пор. Эти данные позволяют количественно оценить эффективность пористой среды как сорбционного или каталитического фильтра и выявить влияние структуры потока на распределение накопленного вещества.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФ № 23-71-30013.

## **ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ МЕТОДАМИ РАЗДЕЛЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА И ИХ ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ**

Т.А. Новгородов \*<sup>1</sup> В.Н. Алексеев<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова, Якутск, Россия  
\*[tuygun2000@gmail.com](mailto:tuygun2000@gmail.com)

В данной работе рассматриваются задачи течения несжимаемой жидкости, решаемые с применением трёх различных численных методов: проекционного метода Хорина, метода IPCS и метода CSS. Проводится сравнение этих подходов по таким критериям, как точность, вычислительная эффективность и скорость получения решения.

Указанные методы относятся к классу методов разделения метода конечных элементов, в которых система уравнений Навье–Стокса преобразуется в совокупность независимых уравнений, отдельно описывающих поведение давления и скорости. Это позволяет упростить численную реализацию и повысить устойчивость расчётов.

Решения реализованы с использованием вычислительной библиотеки FEniCS на языке Python, при этом построение конечноэлементных сеток для расчётных областей осуществлялось в программе Gmsh.

Поскольку реализация указанных методов связана с большими временными затратами на вычисления, одной из основных задач при их применении стала оптимизация производительности. Для её повышения была реализована параллельная версия программного кода с использованием протокола MPI.

В работе представлены результаты численного моделирования как на областях с известными характеристиками течения (эталонной задаче), так и на более сложных геометриях.

## **ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ УПРУГИХ ТЕЛ С КОНЦЕНТРАЦИЯМИ НАПРЯЖЕНИЙ**

Н.М. Афанасьева<sup>1</sup> А.А. Кузьминов \*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова, Якутск, Россия  
\*[kaalpalve@gmail.com](mailto:kaalpalve@gmail.com)

В задачах теории упругости существуют сингулярные решения, обусловленные наличием бесконечных значений напряжений в отдельных точках области, называемых особыми. Наличие или отсутствие сингулярного решения, поведение напряжений определяются геометрией тела и значениями упругих постоянных в окрестности особой точки. Актуальной становится задача поиска геометрии и свойств материала, которые обеспечивают в окрестности особых точек оптимальный вариант напряжённого состояния.

Рассмотрена двумерная задача линейной упругости, ее решение методом конечных элементов. Исследована сходимость модельных задач с концентрациями напряжений,

проведены серии тестовых расчетов методов решения. Показано, что изменение геометрии в окрестности особой точки может устранить концентрацию напряжений. Рассмотрена задача оптимизации геометрии в окрестности особой точки, исследована зависимость задачи оптимизации от упругих параметров и параметров геометрии, найдены оптимальные параметры. Проведено численное решение трехмерной задачи.

## **DG-GMSFEM ДЛЯ ЗАДАЧИ ПЕРЕНОСА В ДВОЙНОМ КONTИНУУМЕ В ПЕРФОРИРОВАННЫХ ОБЛАСТЯХ**

В.Н. Алексеев \*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова, Якутск, Россия

\*alekseev.valen@mail.ru

В этой работе разрабатывается метод дискретных обобщенных многомасштабных конечных элементов Галеркина (DG-GMsFEM) для решения задач переноса двойного континуума в перфорированных областях. Математическая модель включает уравнения конвекции-диффузии для концентраций с потоком, описываемым уравнениями Стокса. Уравнения модели выводятся путем гомогенизации небольших перфораций с использованием методов гомогенизации мультиконтинуума. После выполнения этой гомогенизации мы получаем соответствующие параметры для модели переноса двойного континуума. Полученная система включает более крупные перфорации, которые разрешаются с помощью многомасштабных базисных функций. Для приближения грубой сетки вводится метод редукции многомасштабной модели, который строит локальные многомасштабные базисные функции для генерации модели меньшей размерности. Предлагаемый метод редукции основан на DG-GMsFEM и включает два шага: (1) построение пространства моментальных снимков и (2) решение локальных спектральных задач для редукции размерности в этом пространстве. Представлены численные результаты для двумерной задачи, чтобы продемонстрировать производительность метода. Численные результаты показывают, что предложенный метод обеспечивает хорошие результаты при значительном уменьшении размера системы.

Работа поддержана грантом Российского научного фонда 23-71-30013.

## ЛЕКТОРЫ

---

1. Afanasev Nikita, кандидат физико-математических наук, University of Zurich, Zurich, Switzerland.
2. Berloff Pavel, Professor, Imperial College, United Kingdom.
3. Huang Jian, PhD, National Center for Applied Mathematics in Hunan & Xiangtan University, Xiangtan, China
4. Jiang Tongsong, Professor, Linyi University, Linyi, Shangdong Xiandai University, Jinan, China.
5. Karabasov Sergei, доктор физико-математических наук, Queen Mary University of London, London, United Kingdom.
6. Nerukh Dmitry, Aston University, Birmingham, United Kingdom.
7. Khuzhayorov Bakhtiyor, доктор физико-математических наук, Samarkand State University, Samarkand, Romanovsky Institute of Mathematics of ASRU, Tashkent, Uzbekistan.
8. Song Caiqin, PhD, University of Jinan, Jinan, China.
9. Temirbekov Nurlan, доктор физико-математических наук, Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan.
10. Utyuzhnikov Sergey, доктор физико-математических наук, University of Manchester, Manchester, United Kingdom.
11. Аветисян Арутюн Ишханович, доктор физико-математических наук, Институт системного программирования имени В.П. Иванникова РАН, Москва, Россия.
12. Алиханов Анатолий Алиевич, кандидат физико-математических наук, Северо-Кавказский федеральный университет, Ставрополь, Россия.
13. Аммосова Ольга Александровна, кандидат технических наук, Институт проблем нефти и газа Федерального исследовательского Центра «Якутский научный центр Сибирского Отделения РАН», Якутск, Россия.
14. Аристова Елена Николаевна, доктор физико-математических наук, Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия.
15. Асташова Ирина Викторовна, доктор физико-математических наук, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова, Москва, Россия.
16. Асфандияров Данил Гамилевич, кандидат физико-математических наук, Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, Москва, Россия.
17. Бахолдин Игорь Борисович, доктор физико-математических наук, Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия.
18. Боронина Марина Андреевна, кандидат физико-математических наук, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия.
19. Булатов Виталий Васильевич, доктор физико-математических наук, Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия.
20. Вабищевич Петр Николаевич, доктор физико-математических наук, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия.
21. Василевский Юрий Викторович, доктор физико-математических наук, Институт вычислительной математики РАН, Москва, Россия.
22. Васильев Василий Иванович, доктор физико-математических наук, Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова, Якутск, Россия.
23. Гавенко Ольга Юрьевна, доктор технических наук, кандидат филологических наук, Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН, Иркутск, Россия, Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий, Новосибирск, Россия.

24. Глотов Вячеслав Юрьевич, кандидат физико-математических наук, Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, Москва, Россия.
25. Головизнин Василий Михайлович, доктор физико-математических наук, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия.
26. Гордеева Надежда Михайловна, кандидат физико-математических наук, Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, Москва, Россия.
27. Горобец Андрей Владимирович, доктор физико-математических наук, Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия.
28. Губайдуллин Ирек Марсович, доктор физико-математических наук, Институт нефтехимии и катализа Уфимского федерального исследовательского центра РАН, Уфимский государственный нефтяной технический университет, Уфа, Россия.
29. Гусев Евгений Леонидович, доктор физико-математических наук, Институт проблем нефти и газа Федерального исследовательского Центра «Якутский научный центр Сибирского Отделения РАН», Якутск, Россия.
30. Ерофеев Владимир Иванович, доктор физико-математических наук, Институт проблем машиностроения РАН - филиал ФГБНУ «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики имени А.В. Гапонова-Грехова Российской академии наук», Нижний Новгород, Россия.
31. Ильин Валерий Павлович, доктор физико-математических наук, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия.
32. Козубская Татьяна Константиновна, доктор физико-математических наук, Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия.
33. Копьев Виктор Феликсович, доктор физико-математических наук, Центральный аэрогидродинамический институт имени профессора Н.Е. Жуковского, Москва, Россия.
34. Кудряшов Николай Алексеевич, доктор физико-математических наук, Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, Россия.
35. Кузовлев Дмитрий Игоревич, кандидат физико-математических наук, Математический институт имени В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
36. Кузьмин Александр Григорьевич, доктор физико-математических наук, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
37. Ладонкина Марина Евгеньевна, кандидат физико-математических наук, Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия.
38. Лаевский Юрий Миронович, доктор физико-математических наук, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия.
39. Лазарев Нюргун Петрович, доктор физико-математических наук, Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова, Якутск, Россия.
40. Лазарева Галина Геннадьевна, доктор физико-математических наук, Российский университет дружбы народов, Москва, Россия.
41. Левин Владимир Алексеевич, доктор физико-математических наук, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия.
42. Литвинов Владислав Львович, кандидат технических наук, Самарский государственный технический университет, Сызрань, Россия.
43. Марков Владимир Васильевич, доктор физико-математических наук, Математический институт имени В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
44. Марчук Андрей Гурьевич, доктор физико-математических наук, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия.
45. Марчук Игорь Владимирович, доктор физико-математических наук, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия.

46. Марчук Николай Гурьевич, доктор физико-математических наук, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, Россия.
47. Мاستихин Антон Вячеславович, кандидат физико-математических наук, Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, Москва, Россия.
48. Мастихина Анна Антоновна, кандидат физико-математических наук, Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, Москва, Россия.
49. Меньшов Игорь Станиславович, доктор физико-математических наук, Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия.
50. Морозов Алексей Анатольевич, доктор физико-математических наук, Институт теплофизики имени С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск, Россия.
51. Муравлева Екатерина Анатольевна, кандидат физико-математических наук, Лаборатория искусственного интеллекта AI4Science Center Sber, Сколковский институт науки и технологий Skoltech, Москва, Россия.
52. Мухин Сергей Иванович, доктор физико-математических наук, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия.
53. Назайкинский Владимир Евгеньевич, доктор физико-математических наук, Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия.
54. Наседкин Андрей Викторович, доктор физико-математических наук, Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия.
55. Оселедец Иван Валерьевич, доктор физико-математических наук, Института искусственного интеллекта AIRI, Сколковский институт науки и технологий, Москва, Россия.
56. Пененко Алексей Владимирович, доктор физико-математических наук, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия.
57. Попова Татьяна Семеновна, доктор физико-математических наук, Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова, Якутск, Россия.
58. Порубов Алексей Викторович, доктор физико-математических наук, Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия.
59. Рудой Евгений Михайлович, доктор физико-математических наук, Институт гидродинамики имени М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия.
60. Савин Александр Сергеевич, доктор физико-математических наук, Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, Москва, Россия.
61. Сидняев Николай Иванович, доктор технических наук, Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, Москва, Россия.
62. Соловьев Андрей Валерьевич, кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия.
63. Стрижак Сергей Владимирович, кандидат технических наук, Институт системного программирования имени В.П. Иванникова РАН, Москва, Россия.
64. Тимонин Владимир Иванович, доктор физико-математических наук, Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, Москва, Россия.
65. Титарев Владимир Александрович, доктор физико-математических наук, Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, Москва, Россия.
66. Тиховская Светлана Валерьевна, кандидат физико-математических наук, Институт математики имени С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия.
67. Тишкин Владимир Федорович, доктор физико-математических наук, Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия.
68. Трахинин Юрий Леонидович, доктор физико-математических наук, Институт математики имени С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия.

69. Федотов Анатолий Александрович, кандидат физико-математических наук, Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, Москва, Россия.
70. Филиновский Алексей Владиславович, доктор физико-математических наук, Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, Москва, Россия.
71. Филиппов Александр Сергеевич, доктор технических наук, Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, Москва, Россия.
72. Ханхасаев Владислав Николаевич, кандидат физико-математических наук, Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления, Улан-Удэ, Россия.
73. Храпов Павел Васильевич, кандидат физико-математических наук, Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, Москва, Россия.
74. Цыпкин Георгий Геннадьевич, доктор физико-математических наук, Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия.
75. Чесноков Александр Александрович, доктор физико-математических наук, Институт гидродинамики имени М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия.
76. Четверушкин Борис Николаевич, доктор физико-математических наук, Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия.
77. Шайдуров Владимир Викторович, доктор физико-математических наук, Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия.
78. Шаргатов Владимир Анатольевич, доктор физико-математических наук, Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, Россия.
79. Шашкин Владимир Валерьевич, кандидат физико-математических наук, Институт вычислительной математики имени Г.И. Марчука РАН, Москва, Россия.
80. Широков Дмитрий Сергеевич, доктор физико-математических наук, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, Россия.
81. Шутяев Виктор Петрович, доктор физико-математических наук, Институт вычислительной математики имени Г.И. Марчука РАН, Москва, Россия.
82. Эглит Маргарита Эрнестовна, доктор физико-математических наук, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия.
83. Якобовский Михаил Владимирович, доктор физико-математических наук, Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия.
84. Яшина Марина Викторовна, доктор технических наук, Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ), Москва, Россия.

## УЧАСТНИКИ (МОЛОДЫЕ УЧЕНЫЕ)

---

1. Ammosov Dmitry, кандидат физико-математических наук, Khalifa University of Science and Technology, Abu Dhabi, United Arab Emirates.
2. Bai Huiran, аспирант, National Center for Applied Mathematics in Hunan & Xiangtan University, Xiangtan, China.
3. Guo Zhenwei, кандидат физико-математических наук, Liaocheng University, Liaocheng, China, Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова, Якутск, Россия.
4. Zhang Dong, кандидат физико-математических наук, Qufu Normal University, Qufu, China, Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова, Якутск, Россия.
5. Агрелов Илья Николаевич, аспирант, Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия.
6. Алексеев Валентин Николаевич, кандидат физико-математических наук, Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова, Якутск, Россия.
7. Аммосов Альберт Владимирович, Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова, Якутск, Россия.
8. Бабенко Богдан Русланович, студент, Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, Москва, Россия.
9. Баиров Сафрон Анатольевич, аспирант, Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления, Улан-Удэ, Россия.
10. Баттулга Энхжаргал, аспирант, Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, Москва, Россия.
11. Ващенко Максим Игоревич, студент, Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, Москва, Россия.
12. Волков Никита Сергеевич, студент, Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, Москва, Россия.
13. Гвоздев Платон Алексеевич, студент, Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, Москва, Россия.
14. Григорьев Василий Васильевич, кандидат физико-математических наук, Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова, Якутск, Россия.
15. Гуринов Айтал Иванович, аспирант, Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова, Якутск, Россия.
16. Данилин Александр Вадимович, Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, Москва, Россия.
17. Житников Константин Романович, студент, Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия.
18. Захарова Мария Николаевна, аспирант, Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова, Якутск, Россия.
19. Иванов Дьулус Харлампович, кандидат физико-математических наук, Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова, Якутск, Россия.
20. Ильина Кюннэй Павловна, Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова, Якутск, Россия.
21. Калачикова Уйгулаана Семеновна, кандидат физико-математических наук, Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова, Якутск, Россия.
22. Кожурина Полина Ивановна, студент, Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия.

23. Коломийцев Георгий Васильевич, Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, Россия.
24. Копинцу Илона Иосифовна, студент, Московский Авиационный Институт, Москва, Россия.
25. Кравченко Олег Викторович, Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, Москва, Россия.
26. Кузьминов Александр Александрович, студент, Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова, Якутск, Россия.
27. Кычкина Вилена Григорьевна, аспирант, Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова, Якутск, Россия.
28. Майоров Павел Александрович, кандидат технических наук, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия.
29. Майоров Петр Александрович, кандидат технических наук, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия.