Задачи электротомографии для геофизических исследований

А.Е. Колесов

Кафедра "Недропользование",
Геологоразведочный факультет,
Северо-Восточный федеральный университет
имени М.К. Аммосова

Применение математического моделирования, цифровых технологий в сфере промышленности Республики Саха (Якутия),
15 декабря 2020, Якутск

Содержание

Электротомография

Электротомография – это современная методика геофизических исследований методом сопротивлений.

Методы сопротивлений основаны на пропускании с помощью пары электродов известного постоянного тока и измерении напряжения, вызванного этим током, с помощью другой пары электродов.

Зная ток и напряжение, можно вычислить *электрическое сопротивление*, а с учетом конфигурации электродов можно установить, к какой части подповерхностного пространства это сопротивление относится.

Электротомография

В отличие от традиционного метода *вертикального электрического зондирования*, в электротомографии применяются более плотные системы наблюдений с постоянным расстоянием между электродами.

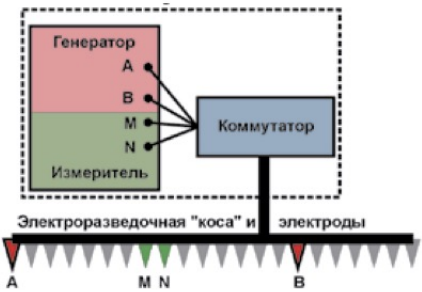
Суть методики измерений заключается в многократных повторных измерениях сигнала в приемных электродах, при различных положениях питающих электродов.

Благодаря использованию данного принципа и современных алгоритмов, электротомография позволяет изучать сложные двумерные и трехмерные среды.

Аппаратура

Качество интерпретации данных электротомографии тесно связана с числом и плотностью измерений.

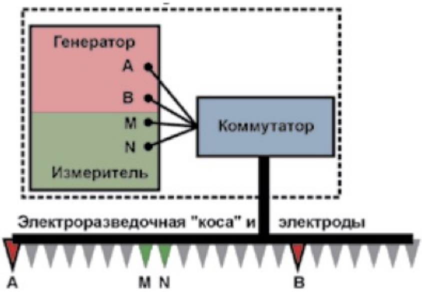
Для достижения максимальной эффективности при проведении измерений применяется специальная многоэлектродная аппаратура.



Аппаратура

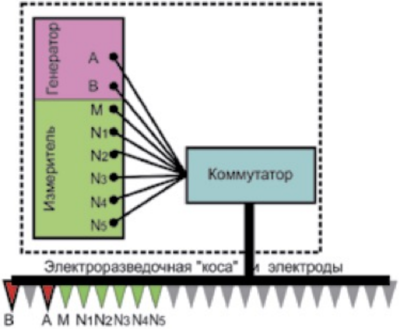
В многоэлектродной аппаратуре используется большой набор электродов (от 48 до 128 штук), соединенных с помощью электроразведочных кос.

При этом каждый электрод может использоваться не только как приемный, но и как питающий.



Аппаратура

В начале 21 века начали использовать многоканальную многоэлектродную аппаратуру, которая позволяет параллельно проводить измерения на нескольких приемных линиях и кратко увеличить скорость измерений.



Аппаратура

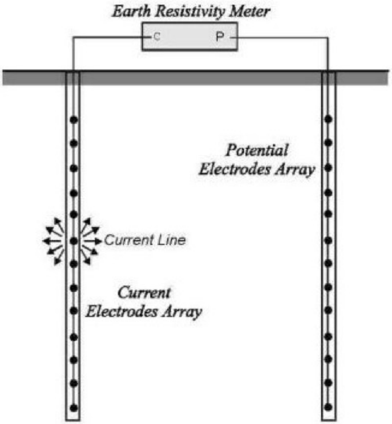
Наиболее известные в мире приборы для электротомографии выпускают фирмы:

- **Iris Instruments** (Франция и Япония),
- **AGIUSA** (США).

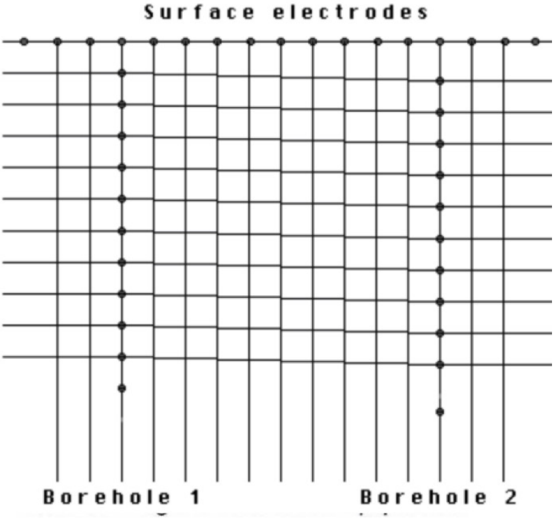
В России существует несколько разработчиков подобной аппаратуры:

- **ОМЕГА-48** (Логис, Раменское Московской области),
- **СКАЛА-48** (Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука СО РАН, Новосибирск).

Скважинная томография



Скважинная томография



Программное обеспечение

Программное обеспечение для интерпретации результатов электротомографии:

- **Res2DInv/Res3DInv** (M.H.Loke, Geotomo software, Malaysia),
- **ZondRes2D/ZondRes3D** (Каминский А.Е., Zond software),
- **DiInSo** (Мариненко А.В., Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука СО РАН, Новосибирск),
- **x2ipi** (Бобачев А.А, Геологический факультет МГУ, Москва).

Применение

Применение электротомографии целесообразно при всех детальных (масштаб 1:2000 и крупнее) геофизических исследованиях:

- при инженерно-геологических и гидрогеологических изысканиях,
- изучении геологического разреза на малых и средних глубинах при поисках и разведке полезных ископаемых,
- изучении археологических памятников,
- решении геоэкологических и других задач.

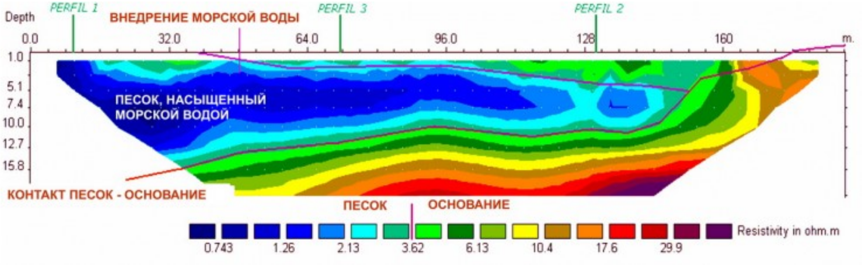
Применение

Применение электротомографии является необходимым условием для изучения геологических разрезов, отличающихся от горизонтально-слоистых, таких как:

- рудные зоны,
- зоны тектонических нарушений,
- насыпные и искусственные грунты в зонах городской застройки,
- многолетнемерзлые породы.

Применение

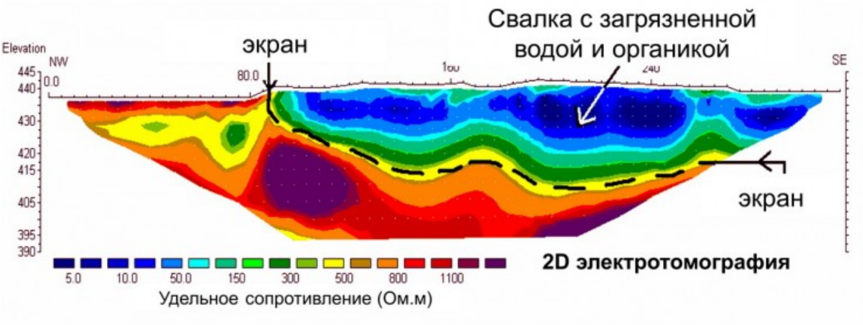
Изучение внедрения соленой воды в грунт



Источник: http://nw-geo.ru/geophysics/tech/tomography/

Применение

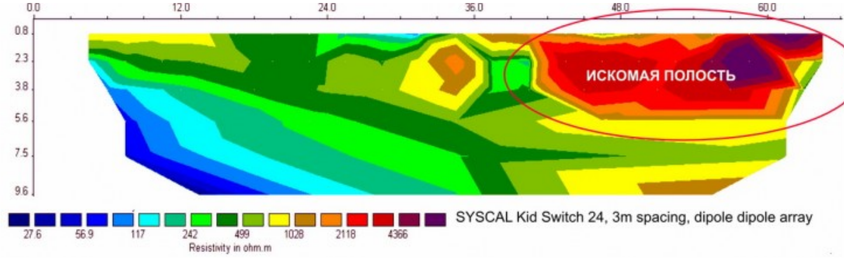
Изучение свалки



Источник: http://nw-geo.ru/geophysics/tech/tomography/

Применение

Поиск пустот для археологических задач



Источник: http://nw-geo.ru/geophysics/tech/tomography/

Постановка задачи

Рассмотрим краевую задачу для эллиптического уравнения

$$-\nabla \cdot \sigma(\boldsymbol{x}) \nabla u = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega,$$

$$\sigma(\boldsymbol{x}) \frac{\partial u}{\partial n} = g(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega,$$

где $\sigma(\boldsymbol{x})$ – сопротивление, $u(\boldsymbol{x})$ – электрический потенциал и $g(\boldsymbol{x})$ – приложенная плотность тока, которые должны удовлетворять следующим условиям

$$\int_{\partial\Omega} u(\boldsymbol{x}) ds = 0, \quad \int_{\partial\Omega} g(\boldsymbol{x}) ds = 0.$$

Расчетные области с электродами

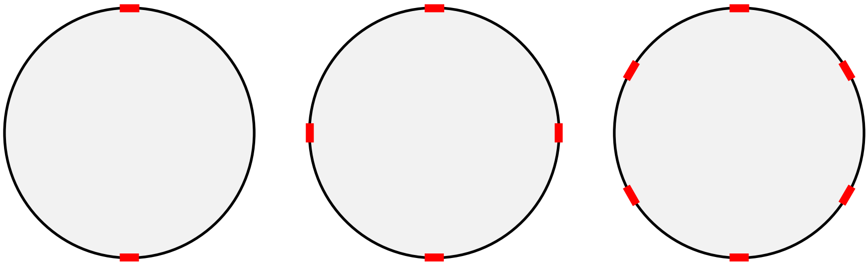


Схема пропускания тока

1 вариант

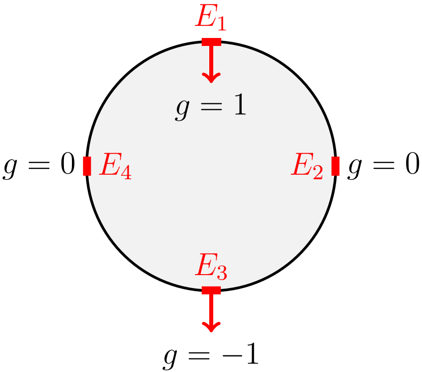
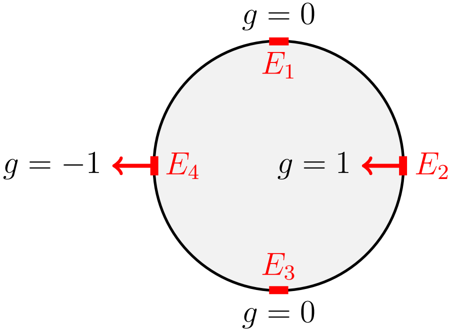


Схема пропускания тока

2 вариант



W

Прямая и обратная задачи

$$-\nabla \cdot \sigma(\boldsymbol{x})\nabla u = 0,\ \boldsymbol{x} \in \Omega, \quad \sigma(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial n} = g(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x} \in \partial\Omega,$$

$$\int_{\partial\Omega} u(\boldsymbol{x})ds = \int_{\partial\Omega} g(\boldsymbol{x})ds = 0.$$

Прямая задача. Найти электрический потенциал $u(\boldsymbol{x})$ в Ω при заданных значениях плотности тока $g(\boldsymbol{x})$ на $\partial\Omega$, зная коэффициент сопротивление $\sigma(\boldsymbol{x})$.

Обратная задача. Необходимо определить распределение коэффициента $\sigma(\boldsymbol{x})$ внутри Ω, используя набор заданных значений плотности тока $g_j(\boldsymbol{x})$ и соответствующих измеренных значений потенциала $m_j(\boldsymbol{x})$ на $\partial\Omega$, где M – количество измерений, $j = 1, \ldots, M$.

Итерационный метод

Минимизация невязки

$$J = \sum_{j=1}^{M} \int_{\partial\Omega} \left| u_j(\boldsymbol{x}) - m_j(\boldsymbol{x}) \right|^2 \, ds.$$

где $u_j(\boldsymbol{x})$, $j = 1, \ldots, M$ – решения прямой задачи при заданных $g_j(\boldsymbol{x})$

$$-\nabla \cdot \sigma^*(\boldsymbol{x}) \nabla u_j = 0, \; \boldsymbol{x} \in \Omega, \quad \sigma(\boldsymbol{x}) \frac{\partial u_j}{\partial n} = g_j(\boldsymbol{x}), \; \boldsymbol{x} \in \partial\Omega,$$

$$\int_{\partial\Omega} u_j(\boldsymbol{x}) ds = \int_{\partial\Omega} g_j(\boldsymbol{x}) ds = 0.$$

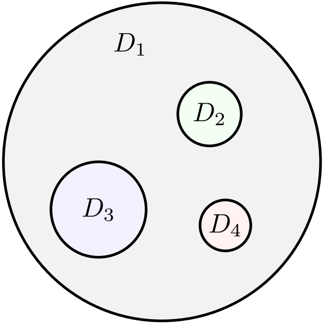
Кусочно-постоянный коэффициент

Распределение коэффициента $\sigma(\boldsymbol{x})$ можно представить в виде

$$\sigma(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i \chi_{D_i}(\boldsymbol{x}),$$

где D_i – подобласть с σ_i, $\Omega = \cup_{i=1}^{N} D_i$, $\chi_{D_i}(\boldsymbol{x})$ – характеристическая функция подобласти D_i:

$$\chi_i(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \boldsymbol{x} \in D_i, \\ 0, & \boldsymbol{x} \in \Omega \backslash D_i. \end{cases}$$



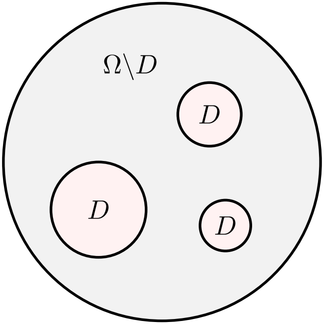
Кусочно-постоянный коэффициент

Иы ограничимся двумя материалами с сопротивлениями 1 и 2, обозначим через D подобласть с коэффициентом 2.

Распределение коэффициента $\sigma(\boldsymbol{x})$ можно записать как

$$\sigma(\boldsymbol{x}) = 1 + \chi_D(\boldsymbol{x})),$$

где $\chi_D(\boldsymbol{x})$ – характеристическая функция подобласти D.



Вспомогательное уравнение

Введем вспомогательную функцию $q(\boldsymbol{x})$, которая описывает подобласть D следующим образом

$$\begin{cases} q(\boldsymbol{x}) \geq 0, & \boldsymbol{x} \in D, \\ q(\boldsymbol{x}) < 0, & \boldsymbol{x} \in \Omega \backslash D, \end{cases}$$

и функцию Хевисайда

$$H(q(\boldsymbol{x})) = \begin{cases} 1, & q(\boldsymbol{x}) \geq 0, \\ 0, & q(\boldsymbol{x}) < 0. \end{cases}$$

Тогда коэффициент $\sigma(\boldsymbol{x})$ можно определить как

$$\sigma(\boldsymbol{x}) = 1 + H(q(\boldsymbol{x})).$$

Вспомогательное уравнение

Для определения $q(\boldsymbol{x})$ решаем следующую задачу

$$
\begin{aligned}
-\gamma \Delta q + q = f(\boldsymbol{x}), \quad & \boldsymbol{x} \in \Omega, \\
q = 0, \quad & \boldsymbol{x} \in \partial\Omega,
\end{aligned}
$$

где $\gamma = \mathrm{const} > 0$ – сглаживающий параметр.

Нужно найти правую часть $f(\boldsymbol{x})$ такую, что $q(\boldsymbol{x})$ описывает искомый коэффициент $\sigma(\boldsymbol{x})$ через функцию Хевисайда

$$\sigma(\boldsymbol{x}) = 1 + H(q(\boldsymbol{x}))$$

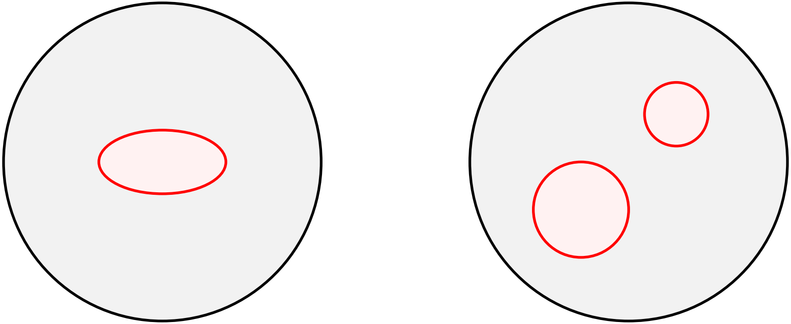
Чтобы найти $f(\boldsymbol{x})$, минимизируем

$$J(f) = \sum_{j=1}^{M} \int_{\partial\Omega} \left| u_j(\boldsymbol{x}; f) - m_j(\boldsymbol{x}) \right|^2 \, ds.$$

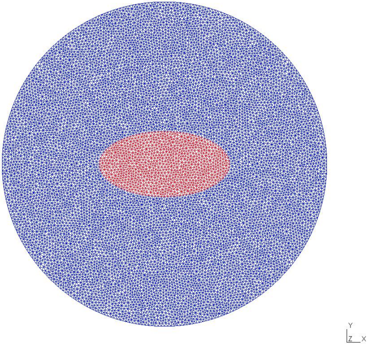
Алгоритм минимизации

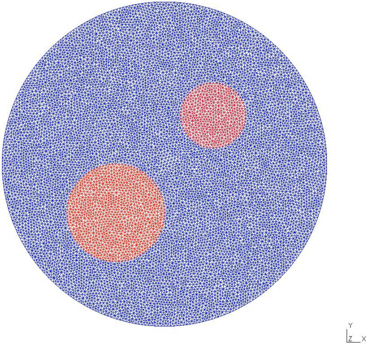
input M, g_j, m_j, f^0, γ, tol, K
for $k = 0$ **to** K **do**
  $q^k(\boldsymbol{x}) \leftarrow$ решение вспомогательной задачи
  $\sigma^k(\boldsymbol{x}) \leftarrow 1 + H(q^k(\boldsymbol{x}))$
  for $j = 1$ **to** M **do**
    $u_j^k \leftarrow$ решение прямой задачи для $g_j(\boldsymbol{x})$
  end for
  $J^k(f^k) \leftarrow \sum_{j=1}^{M} \int_{\partial\Omega} |u_j(f;\boldsymbol{x}) - m_j(\boldsymbol{x})|^2 \,\mathrm{d}s$
  $dJ^k/df^k \leftarrow$ методом сопряженных задач
  if $\left\| dJ^k/df^k \right\|_{L^\infty(\Omega)} < tol$ **then**
    $\sigma(\boldsymbol{x}) \leftarrow \sigma^k(\boldsymbol{x})$
    stop
  end if
  $f^{k+1} \leftarrow f^k - \beta^k dJ^k/df^k$
end for
$\sigma(\boldsymbol{x}) \leftarrow \sigma^k(\boldsymbol{x})$

Искомые коэффициенты

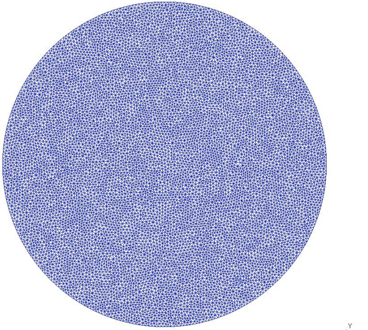


Расчетные сетки



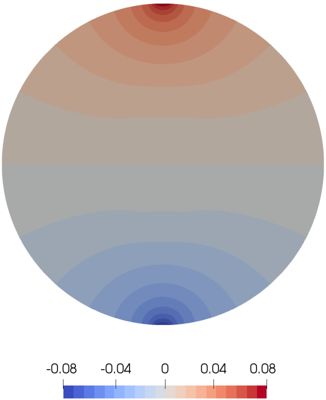


Расчетные сетки

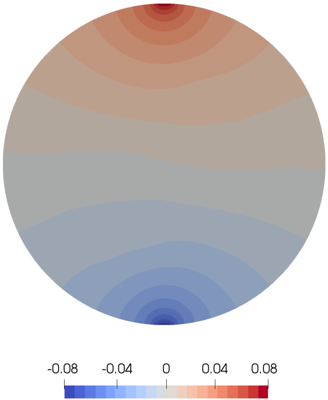


Генерация данных

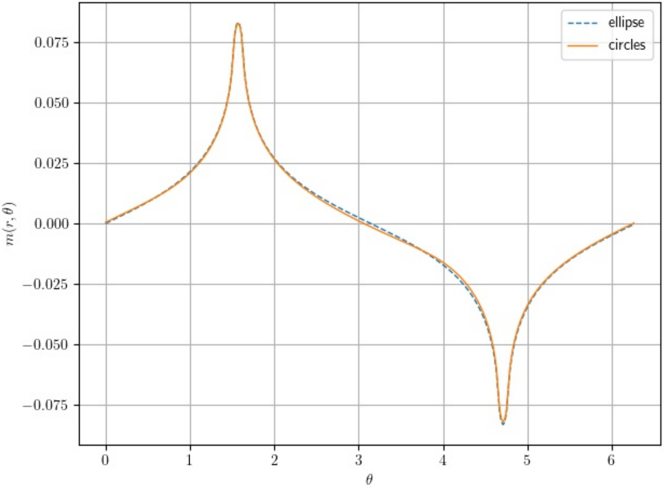
Эллипс



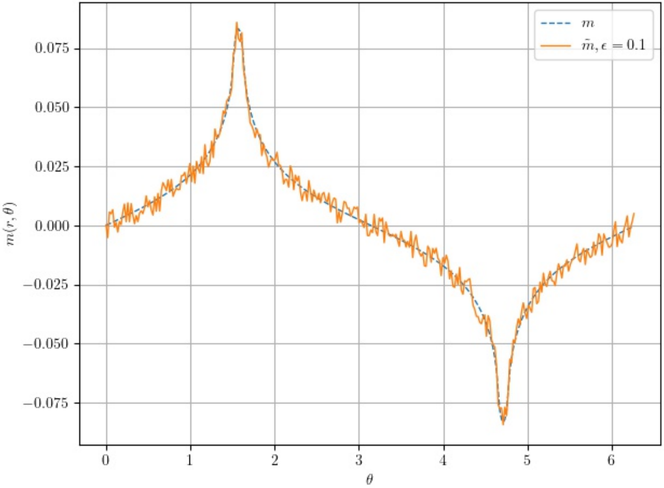
Окружности



Генерация данных



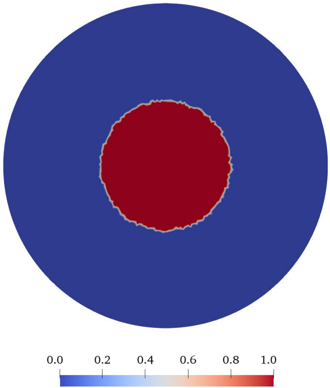
Добавление шума



Начальное приближение

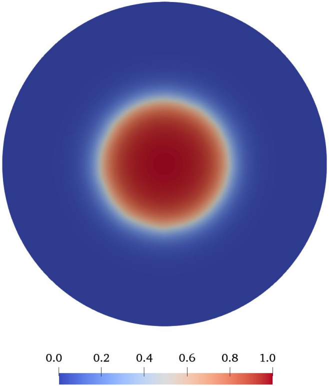
$$f_0(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1.0, & \boldsymbol{x} \in D_0, \\ 0.0, & \boldsymbol{x} \in \Omega \backslash D_0. \end{cases}$$

$f^0(\boldsymbol{x})$

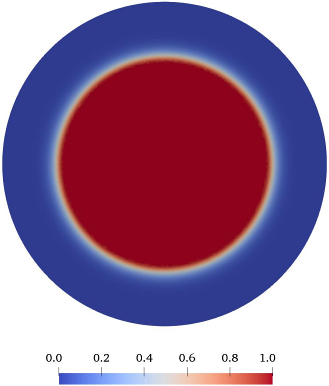


Начальное приближение

$q^0(\boldsymbol{x})$

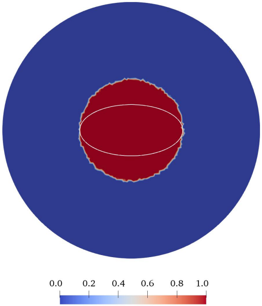


$H_\alpha^0(q(\boldsymbol{x}))$

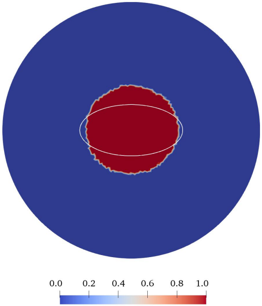


Результаты. Эллипс

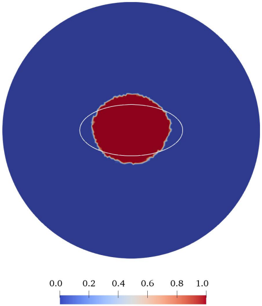
1 итерация



10 итерация



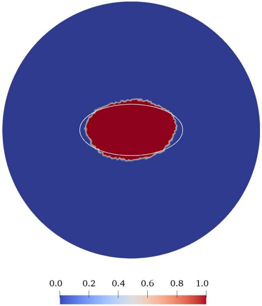
15 итерация



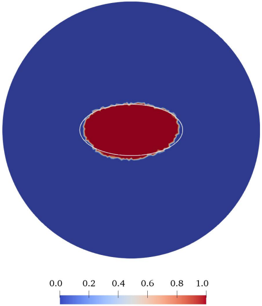
$$M = 3, \quad \epsilon = 1\%, \quad \gamma = 0.001$$

Результаты. Эллипс

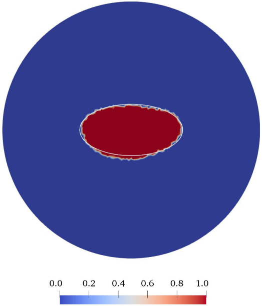
20 итерация



30 итерация



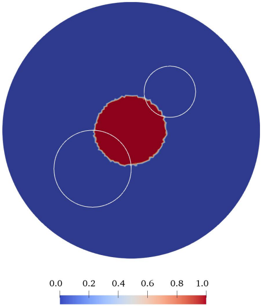
50 итерация



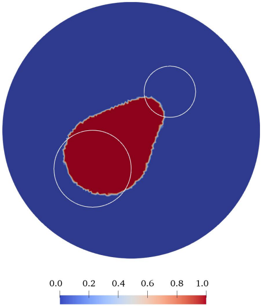
$$M = 3, \quad \epsilon = 1\%, \quad \gamma = 0.001$$

Результаты. Окружности

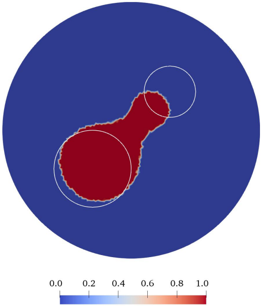
5 итерация



25 итерация



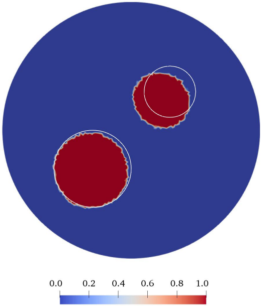
50 итерация



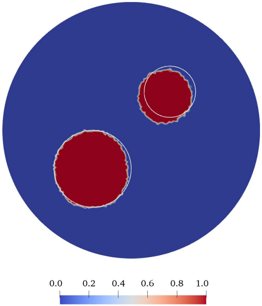
$$M = 5, \quad \epsilon = 1\%, \quad \gamma = 0.006$$

Результаты. Окружности

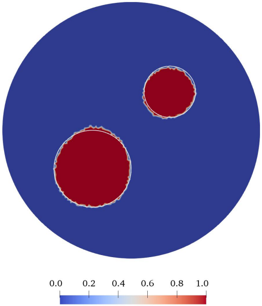
150 итерация



300 итерация



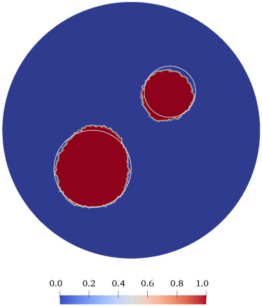
650 итерация



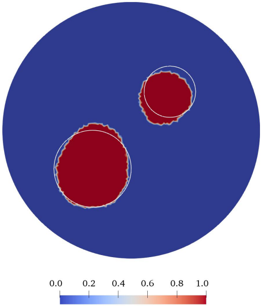
$$M = 5, \quad \epsilon = 1\%, \quad \gamma = 0.006$$

Результаты. Окружности

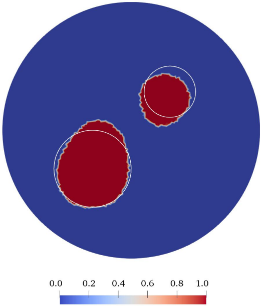
$\epsilon = 2\%$



$\epsilon = 3\%$



$\epsilon = 4\%$



$$M = 5, \quad \gamma = 0.006$$

Заключение

Работа выполнена при поддержке:

- Грант Президента РФ для поддержки молодых ученых МК-1131.2020.1,
- Грант РФФИ № 20-01-00207,
- Мега-грант № 14.Y26.31.0013.

Спасибо за внимание!